教育部受託辦理107學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題12題及綜合題2大題，共計100分；**選擇題請用2B鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍、黑色鋼筆或原子筆在答案本上作答**。本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題（共40分）

一、單選題（每題3分，共24分）

(A) 1.設四邊形 $ABCD$ 為邊長 2 的正方形，E 點與 F 點分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ 的中點，空間中 $\overline{CG}$ 垂直四邊形 $ABCD$，又 $\overline{CG}=1$，求 D 點到平面 EFG 的距離？ (A)$\frac{1}{\sqrt{11}}$ (B)$\frac{2}{\sqrt{11}}$ (C)$\frac{1}{\sqrt{13}}$ (D)$\frac{2}{\sqrt{13}}$ 。

(D) 2.設 a 、b 為正實數，如果 $\log_8 a+\log_4 b=3$ 且 $\log_8 b+\log_4 a=7$ ，試求 $ab=$？ (A)512 (B)1024 (C)2048 (D)4096。

(C) 3.投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 a、b、c。在 b 為偶數的條件下，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$ 的機率最接近下列哪個選項？ (A)0.33 (B)0.34 (C)0.35 (D)0.36。

(B) 4.設 a 、b 為實數，若 $a+b=2$ ，試求 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{3b+2}$ 的最大值？ (A)$\frac{\sqrt{570}}{5}$ (B)$\frac{\sqrt{570}}{6}$ (C)$\frac{\sqrt{570}}{19}$ (D)$\frac{5\sqrt{95}}{6}$ 。

(B) 5.今有大小相同的球6顆，3顆紅色，2顆藍色，1顆黃色，今將6球分給三個人，每人各得2顆，則有多少種不同的分法？ (A)12 (B)15 (C)18 (D)24。

(A) 6.五個數 a、b、c、d、e 均為實數，若 $a+b+c+d+e=10$ 且 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\frac{205}{4}$ 時，則 c 的最大值為 k，c 的最小值為 t，下列選項何者正確？ (A)$k=7$ (B)$k=6$ (C)$t=-2$ (D)$t=-4$ 。

(C) 7.令 $\overrightarrow{A}$ 、$\overrightarrow{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\overrightarrow{A}$ 的長度為1，$\overrightarrow{B}$ 的長度為2且 $\overrightarrow{A}$ 與 $\overrightarrow{B}$ 之間的夾角為 60^o 。令 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ ，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}$ ，其中 x 、y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 以及 $-2\le x+2y\le 0$，則內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 最大值為何？ (A)14 (B)7 (C)-6 (D)-8 。

(D) 8.在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=\frac{25}{13}$，$\angle C$ 為鈍角且 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\frac{5}{2}$，則 $\cos\angle BAC=$？ (A)$\frac{16}{65}$ (B)$\frac{27}{65}$ (C)$\frac{33}{65}$ (D)$\frac{63}{65}$ 。

二、複選題（每題4分，共16分）

(B　C) 9.若$\dfrac{b+c}{2a}=\dfrac{a-c}{2b}=\dfrac{a-b}{2c}$，求$\dfrac{a}{a+b+c}$的值？　(A)1　(B)$-1$　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)$\dfrac{-1}{2}$。

(A　C)10.已知$0\le k\le 1$，當$k=a$時，積分$\int_0^1\left|x^3-kx\right|dx$有最小值$b$，則下列選項何者正確？　(A)$a=\dfrac{1}{2}$　(B)$a=\dfrac{1}{4}$　(C)$b=\dfrac{1}{8}$　(D)$b=\dfrac{1}{16}$。

(ACD)11. $f(x)=2^x$，數列$\langle a_n\rangle$是等差數列，$b_n=f(a_n)$，則下列哪些選項正確？　(A)數列$\langle b_n\rangle$是等比數列　(B)若數列$\langle a_n\rangle$的公差$d>0$，則數列$\langle b_n\rangle$的公比$0<r<1$　(C)數列$\langle a_n\rangle$的首項$a_1=1$，公差$d=\dfrac{1}{2}$，要使$b_n>4096$，則最小正整數$n=24$　(D)$a_1=1$，公差$d=\dfrac{1}{2}$，若$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=22$，則$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=(30+30\sqrt{2})$。

(ABD)12.全班 40 人參加數學、物理測驗，各科分數均為 0~100，已知數學平均 50，標準差 8 分，物理平均 M，標準差 12 分，導師算得物理對數學的迴歸直線方程式為$y=\dfrac{3}{4}x+20$，則下列哪些選項正確？　(A)M=57.5　(B)數學與物理成績的相關係數是 0.5　(C)已知小王數學考 80，則物理也一定考 80　(D)以算術平均數為中心，物理成績分布比較分散。

第二部分：綜合題（共60分）

一、填充題（每題4分，共36分）

1. 若$\left(\sin^2 63^o-3\sin^2 27^o\right)\times\left(\sin^2 9^o-3\cos^2 171^o\right)=\tan\theta$，且$180^o<\theta<360^o$，求$\theta=$<u>$333^0$</u>。

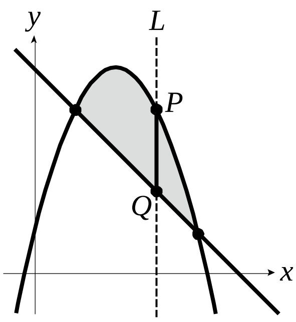
2. 有一數列$\langle a_n\rangle$，若$a_1=0$，且$a_{n+1}-1=a_n+2\sqrt{1+a_n}$，$n=1,2,3,\cdots$，求$a_{30}=$<u>899</u>。

3. 設$f(x)$為2018次的多項式，且$f(t)=\dfrac{1}{2t}$，$t=1,2,3,\cdots,2019$，求$f(2020)=$<u>$\dfrac{1}{2020}$</u>。

4. 無窮級數$\dfrac{1}{2\times3\times4\times5}+\dfrac{1}{3\times4\times5\times6}+\dfrac{1}{4\times5\times6\times7}+\dfrac{1}{5\times6\times7\times8}+\cdots$的和為何？<u>$\dfrac{1}{72}$</u>

5. 已知$A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，設$A^8=aI+bB$，則$(a,b)$之值為<u>(1, 255)</u>。

6. 由 $f(x)=-x^2+5x+1$，$g(x)=-x+6$ 兩圖形所圍成的封閉區域（塗色部分），如右圖。若作直線 L 垂直 x 軸，分別與封閉區域的邊界交於 P、Q 兩點，試求在封閉區域內的 $\overline{PQ}$ 長的最大值。Ans:4



7. 試求 $\sum_{n=1}^{100}[\frac{1}{2}(\log_2 n)-1]$ 之值，其中[ ]為高斯函數。Ans:119

8. 已知 m、n 為正整數，則滿足 $\sqrt{m+\sqrt{m^2-n}}+\sqrt{m-\sqrt{m^2-n}}=6$ 的所有 n 的總和為多少？
Ans:285

9. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，其中 $n\geq 3$。已知 $\sum_{n=1}^{40}a_n=30$，$\sum_{n=1}^{80}a_n=78$，則 $\sum_{n=1}^{123}a_n=$72。

二、計算證明題（每題8分，共24分）

1. 已知 $f(x)=x^3-4x^2+2x+4$，若方程式 $f(x)=0$ 有三實根 α、β、γ，且 $\alpha<\beta<\gamma$，求不等式 $\dfrac{1}{x-\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}+\dfrac{1}{x-\gamma}>0$ 的解。

2. 若複數 $z=x+yi$ (其中 x、y 為實數)，滿足 $|z-1-i|-|z+1+i|=2$，則 $xy=$？

3. 已知：利用極限的概念與二項式定理。試證：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$。