

臺北市立中正高級中學 107 學年度第 1 次專任教師甄選

數學科初選試卷

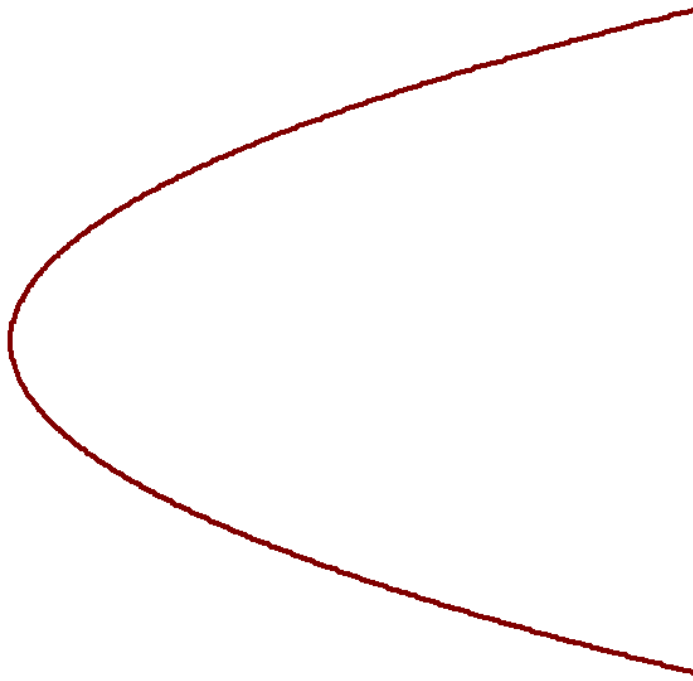
一、填充題：每題 5 分

1. 解方程式 $(x-2^{\frac{1}{2}})(x-3^{\frac{1}{3}})(x-7^{\frac{1}{7}}) = |(x-2^{\frac{1}{2}})(x-3^{\frac{1}{3}})(x-7^{\frac{1}{7}})|$
2. 不等式 $x+y+z+u^2+v^3 \leq 10$ 的解中，有多少組正整數解？
3. 設 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 的圖形與直線 $y=0$ ， $x=0$ 及 $x=3$ 所圍成的區域為 R ，將區間 $[0,3]$ 平分成 $3n$ 等分。求上和 $U_{3n} = ?$
4. 阿正與另外 3 位男生 3 位女生共 7 人站成一排，若阿正不站兩側，且 3 位女生中恰有 2 位女生相鄰，請問共有幾種排法？
5. $\triangle ABC$ 中，在 \overline{BC} 邊上取 D 、 E ，使得 $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$ 。若 $\overline{BD} = 3$ 、 $\overline{DE} = 4$ 、 $\overline{EC} = 8$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積？
6. 台灣彩券最早發行的樂透彩(俗稱小樂透)的玩法是「42 選 6」：購買者從 01~42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎；近期，台灣彩券發行新的樂透彩——雙贏彩，玩法是「24 選 12」：購買者從 01~24 中任選十二個號碼，當這十二個號碼與開出的十二個號碼完全相同或完全不同(皆不計次序)時均得頭獎。假設原來的小樂透中頭獎的機率是 p ，而新發行的雙贏彩中頭獎的機率是 q 。試求比值 $\frac{q}{p}$ 為何？(答案請化為小數，四捨五入至小數點下第一位)
7. 設函數 $f(x) = x - [x]$ ，則化簡 $f(\frac{2 \times 1}{2018}) + f(\frac{2 \times 2}{2018}) + f(\frac{2 \times 3}{2018}) + \dots + f(\frac{2 \times 2018}{2018})$ 的值應為？
8. 化簡 $(\sqrt{10 + \sqrt{51}})^3 + (\sqrt{10 - \sqrt{51}})^3 = ?$

二、計算題：每題 10 分。試題於答案卷，須有過程，否則不予計分。答案卷共四張。

1. 設空間中二點 $A(11, 5, -30)$ 、 $B(-3, -16, 5)$ 與一直線 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-9}{6}$ 。若 P 為 L 上一點，使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，求(1) P 點坐標？... (7 分) (2) $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值為何？... (3 分)
2. 設一整係數三次多項式 $f(x)$ ，其三次項係數為 1，令 $\alpha = \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - 1$ 與 β 、 γ 為 $f(x) = 0$ 的三個根，若 $g(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 8$ ，試求
(1) $f(x) = ?$... (5 分) (2) $\frac{1}{g(\alpha)} + \frac{1}{g(\beta)} + \frac{1}{g(\gamma)} = ?$... (5 分)

3. 設 f 為一實係數多項式函數，設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，其中 $a_n = \frac{f(n)}{n^5}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ ， $f''(0) = 2$ ， $f(1) = 2$ ， $f(-1) = 6$ ，求 (1) $f(x) = ? \cdots (7 \text{ 分})$ (2) $\int_{-1}^1 f(x) dx = ? \cdots (3 \text{ 分})$
4. 設方程式 $\log_6(x+2) + \log_6(5-x) = \log_6(a-x)$ ， a 為整數， x 恰有一實數解，若滿足條件的 a 值之總和為 m ， a 的個數為 n ，則 $(m, n) = ?$
5. 給定一拋物線，試說明如何用尺規作圖找出此拋物線的焦點。



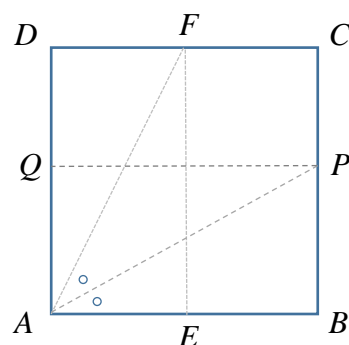
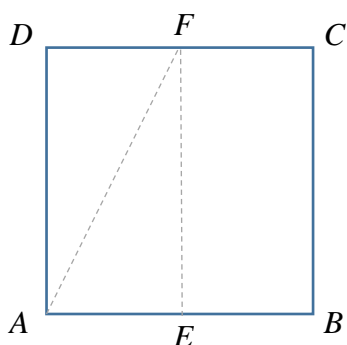
6. 長寬比為黃金比例的矩形稱為黃金矩形。依下列方法，可從一張正方形紙 $ABCD$ 裁出一個黃金矩形 $ABPQ$ ：

(1) 將 \overline{AD} 對摺到 \overline{BC} ，得摺痕 \overline{EF} 。

(2) 摺出 $\angle FAB$ 的角平分線 \overline{AP} 。過 P 作 $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ ，

接著摺出 \overline{AF} 。

則矩形 $ABPQ$ 即為所求。



若只用國中知識，如何證明 $ABPQ$ 為一黃金矩形？ $\cdots(5 \text{ 分})$ 若需用到高中所學知識，又該如何證明之？ $\cdots(5 \text{ 分})$

臺北市立中正高級中學 107 學年度第 1 次專任教師甄選

數學科初選題充題參考答案

一、填充題：每題 5 分

1. $7^{\frac{1}{7}} \leq x \leq 2^{\frac{1}{2}} \text{ or } x \geq 3^{\frac{1}{3}}$	2. 66	3. $\frac{12n^2 + 5n + 1}{2n^2}$	4. 2016
5. $\frac{45\sqrt{7}}{2}$	6. 3.9	7. 1008	8. $13\sqrt{34}$