臺中市立臺中女子高級中等學校 107 學年度第一次教師甄選 數學科 試題

壹、填充題(Ⅰ) (每題 5 分，共 55 分)

1. $\triangle ABC$ 中，A 坐標為$(-2，5)$，$\angle B$ 與 $\angle C$ 的內角平分線方程式分別為 L：$2x-3y+4=0$ 與 M：$x+2y+2=0$，則 C 點的坐標為_______。

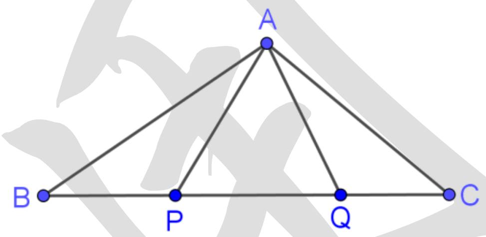
2. 設 a、b、c、d 成等差數列，且實數 x，y，z，u 滿足$\begin{cases} a+b+c+d=60 \\ x+y+z+u=12 \\ az+bu+cx+dy=168 \end{cases}$，

   則 $ay+bx+cu+dz=$ ____________ 。

3. 如右圖，在ΔABC中，P、Q 在$\overline{BC}$上，

   $\overline{BP}=12$，$\overline{PQ}=15$，$\overline{CQ}=9$，$\angle BAP=\angle CAQ$，

   $\overline{AC}=20$，則$\overline{AB}=$ ____________ 。



4. 設國文考科分成兩部分，一部分是測驗成績、另一部分是寫作成績。某校某次國文測驗成績平均為 62 分，標準差為 15 分；寫作成績平均為 18 分，標準差為 5 分。測驗成績與寫作成績的相關係數為 0.6，國文考科的總成績為測驗成績與寫作成績之和，則總成績的標準差為________分。

5. 對所有滿足$a>b>c>d>0$的實數a,b,c,d，欲使$\log_{\frac{a}{b}}2018+\log_{\frac{b}{c}}2018+\log_{\frac{c}{d}}2018\geq k\cdot\log_{\frac{a}{d}}2018$恆成立，則 k 的最大值

   為________。

6. 設 O 為拋物線 $y=4x^2$ 的頂點，若拋物線上異於 O 的兩動點 A、B 滿足$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，則$\overline{AB}$中點 P 的軌跡方程式為_______。

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n})^3}\right)$之值為______。

8. 設兩複數α,β滿足$\alpha^2-3\alpha\beta+9\beta^2=0$，且$\alpha$滿足$|\alpha|=3$，則$|\alpha+\beta|=$_______。

9. 將菱形 $ABCD$ 的紙張沿$\overline{BD}$將ΔBCD往上摺，直到 C 點的投影 P 點正好落在ΔABD的重心上，設此時平面 ABC 與平面

   ABD 之兩面角為銳角θ，若$\overline{AC}=12$，$\overline{BD}=6$，則 $\tan\theta$ 的值為______。

10. 已知 $y=2^{k\sin^2 x}$ 與 $y=4\sqrt{3}\csc x$ 在 $-\pi\le x\le\pi$ 的範圍內交於 A , B 兩點，若 $\overline{AB}=\dfrac{\pi}{3}$，則實數 k 之值為______。

11. 某公司尾牙舉辦「四四如意・百倍奉還」抽獎活動，其規則如下：

「在一個不透明的箱中放入標有連號 1、2、3、…、106 之號碼球各 1 顆(共 106 顆)，抽獎者由箱中一次抽出 4 顆號碼球，其中最大號碼的 100 倍即為該抽獎者所得之獎金」，則抽獎者所得獎金的期望值為 ____________

貳、填充題(Ⅱ) (每題 6 分，共 30 分)

12. 兩相異平行直線 L_1 , L_2 皆為曲線 C： $y=x^3$ 之切線，分別過兩切點作 L_1 , L_2 的法線 M_1 , M_2，若四條直線 M_1 , M_2 , L_1 , L_2 所圍成的四邊形面積為 $\dfrac{60}{7}$，則直線 L_1 之斜率為______。

13. 圓 C：$x^2+y^2=25$ 上有兩點 $A(3,4)$、$B(-5,0)$，有一拋物線 Γ 同時切圓 C：$x^2+y^2=25$ 於 A、B 兩點，則拋物線 Γ 之焦點坐標為______。

14. 方程式 $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$ 之正實數解 $x=$______。

15. 設 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{4\cos x+5}}$，其中 $x\in R$，已知 $f(x)$ 的值域為區間 $[a,b]$，則數對 (a,b)=_______。

16. 設 a 、 b 為實數，且方程式 $x^3+ax^2+bx=8$ 有三個正根，則 $b-2a$ 的最小值為______。

參、計算與證明題(共 15 分，請寫出詳細計算與證明過程，否則不予計分)

1. 設 a 、 b 為兩質數，且 $p=a^b+b^a$ 也為一質數，試求所有解 (a,b)，並請詳述理由。(7 分)

2. 設 a、b、c 皆為正實數，試證：$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\le\dfrac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$。(8 分)