

一、填充題(每格 7 分)

1. 若 $A = \{z \mid z^{12} = 1\}$, $B = \{z \mid z^{16} = 1\}$, $C = \{z_1 z_2 \mid z_1 \in A, z_2 \in B\}$, 則 C 有 _____ 個元素。

2. 化簡 $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} =$ _____。

3. 求 $\frac{(1^4+18^2)(11^4+18^2)(23^4+18^2)(35^4+18^2)(47^4+18^2)}{(5^4+18^2)(7^4+18^2)(17^4+18^2)(29^4+18^2)(41^4+18^2)}$ 的值。(化成最簡分數)

4. 設 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 若函數 $f: A \rightarrow A$,

則滿足 $f(f(x))$ 的值域是 B 的函數 f 有 _____ 個。

5. 若 $x, y \in \mathbb{R}$ 滿足 $x + y = x^2 + y^2$, 則 $x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}y$ 的最大值為 _____。

6. 在 $x^2 + y^2 = 4$ 的圓內接四邊形中, 兩對角線垂直且交於 $(1, 0)$ 者。

則此種圓內接四邊形的最大面積為 _____。

7. 四面體 $ABCD$ 中, 已知 $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 8, \overline{CD} = 11, \overline{DA} = 10, \overline{AC} = 9, \overline{BD} = 12$,

若平面 ABC 與平面 ACD 的夾角為 θ , 求 $\cos \theta =$ _____。

8. 四面體 $D-ABC$ 中 \overline{AD} 與底面 ABC 垂直, 且平面 ABD 垂直平面 BCD 。

已知 \overline{BD} 長為 $\sqrt{3}$, $\angle BDC = 60^\circ$, 若三側面的面積平方和為 10, 求 $\sin \angle ADB$ 的值。

9. 若 $n \in \mathbb{N}$ 滿足 $6 + \frac{1}{n+1} < \sqrt[3]{220} < 6 + \frac{1}{n}$, 則 $n =$ _____。

10. 若 $x \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{61} = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$, $a_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, 3, \dots$ 。

已知 $a_{37} = 2, a_{65} = 3$, 求 $(x, a_{36}) =$ _____。

二、計算證明題(每題 10 分)

1. 設 $2x^{10} + (13x - 1)^{10} = 0$ 的十個複數根為 x_1, x_2, \dots, x_{10} ，其中 $x_{5+k} = \overline{x_k}, k = 1, 2, 3, 4, 5$ ，

- (1) 求 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{x_k}$ 的值。 (2) 求 $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{x_k x_{5+k}}$ 的值。

2. 若 x, y, z 為正實數，證明 $\frac{2x^2 + xy}{z(2\sqrt{y} + \sqrt{x})^2} + \frac{2y^2 + yz}{x(2\sqrt{z} + \sqrt{y})^2} + \frac{2z^2 + zx}{y(2\sqrt{x} + \sqrt{z})^2} \geq 1$

3. 若 a, b, c, d, e, f 為不小於 $-\frac{3}{2}$ 的實數，且 $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + f^5 = 2$ 。

若 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 < n$ 皆成立。

求 n 的最小值並證明。