

國立中科實驗高級中學 107 學年度第一次國中部

數學科教師甄選筆試試題

一、 填充題 (每格 5 分、共 80 分)

1. 設複數 $z_1 = -3 - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z = \sqrt{3} \sin \theta + i(\sqrt{3} \cos \theta + 2)$, 則

$|z - z_1| + |z - z_2|$ 的最小值為 _____。

2. $x, y \in N$ 且 $\frac{xy}{x+y} = 520$, 試求 (x, y) 共有 _____ 組。

3. 空間中有 20 個相異的平面，最多可以將空間分割成 _____ 個區域。

4. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為方程式 $x^4 + x^3 + 1 = 0$ 的四個根，試求
$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \delta \end{vmatrix} = \text{_____}。$$

5. 化簡 $\sqrt[3]{40 + 11\sqrt{13}} + \sqrt[3]{40 - 11\sqrt{13}} = \text{_____}。$

6. 設直線 L_1 經過點 $A(0,0,4)$ 、 $B(1,2,3)$ ；直線 L_2 經過點 $C(3, -1, 2)$ 、 $D(-3, 5, -1)$ 。
若直線 L_3 過點 $(-13, 36, -9)$ 且與直線 L_1 、直線 L_2 各相交於 P 、 Q 兩點，
試求 \overline{PQ} 長度為 _____。

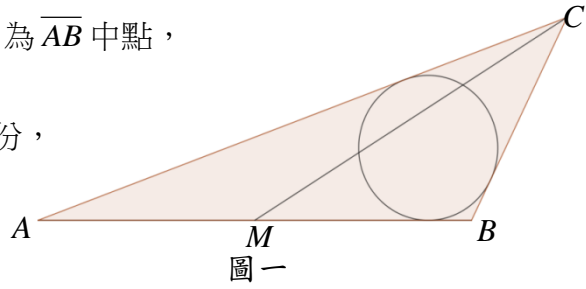
7. 三次曲線 $y = x^3 + ax^2 + 1$, 若通過原點可做出此曲線的三條相異切線，求實數 a 的範圍為 _____。

8. 試求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1^9 + 2^9 + \dots + x^9}{10x^{10}} = \text{_____}。$

9. $\triangle ABC$ 中(如圖一), $\overline{AB} = 10$, M 為 \overline{AB} 中點,

$\triangle ABC$ 內切圓恰將線段 \overline{CM} 三等份,

試求 $\triangle ABC$ 面積=_____。



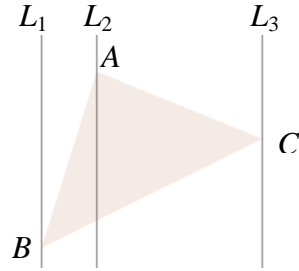
圖一

10. 已知 L_1, L_2, L_3 為三平行直線(如圖二), 且

$\angle BAC = 90^\circ$ 。若 $\overline{AB} = \overline{AC}$, 且 L_1 與 L_2 的距離

為 2、 L_2 與 L_3 的距離為 6, 試問:

$\triangle ABC$ 的面積=_____。



圖二

11. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 0$, $abc = 100$, 若 a, b, c 三數中最大的數為 a , 試求 a 的最小值為_____。

12. 正方形 $ABCD$ 中一點 P , 已知 $\overline{PA} = 7$, $\overline{PB} = 3$, $\overline{PC} = 5$, 求此正方形之面積為_____。

13. 計算 $3(C_1^{107} + C_4^{107} + C_7^{107} + \dots + C_{106}^{107})$ 的整數部分為 m 位, 第一個數字為 n , 最後一個數字為 k , 求數對 $(m, n, k) =$ _____。

14. 已知 P 為質數, 且 $p^3 + 2p^2 + p$ 恰有 42 個正因數, 試求: 所有符合 P 值之最小值為_____。

15. 兩球體 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 與 $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 \leq 9$ 共同部分的立體體積為_____ 立方單位。

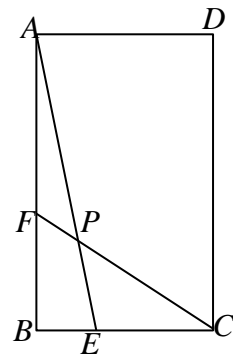
16. $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數值，例如： $[2.8]=2$ 、 $[-2.8]=-3$ ，已知 x 滿足

$$\left[x + \frac{19}{100}\right] + \left[x + \frac{20}{100}\right] + \dots + \left[x + \frac{91}{100}\right] = 546, \text{ 試求： } [100x] = \underline{\hspace{2cm}}。$$

二、 計算題 (共 20 分)

1. 如圖，點 E 、 F 分別在矩形 $ABCD$ 的邊 \overline{BC} 、 \overline{AB} 上，已知 $\overline{BF} = 4$ ， $\overline{BE} = 2$ ，

$\overline{CE} = 4$ ， \overline{AE} 與 \overline{CF} 交於點 P ，且 $\angle APC = \angle AEB + \angle CFB$ ，則矩形 $ABCD$ 的面積為何？ (7 分)



2. 將半徑為 10 公分的三個球放入一半球形碗中，發現此三球的頂端恰與此碗頂端位於同一水平面，請問此半球形狀的碗之半徑為多少公分？ (7 分)



3. 對於任意自然數 n ，試證： $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ (6 分)