

# 臺北市立建國高級中學 105 學年度數理資賦優異學生入班鑑定

## 【數學能力測驗】試題本

請不要翻到次頁!!

讀完本頁說明，聽從監試委員的指示，才開始作答!

### 注意事項

- 1.請檢查桌面上已放置「試題本」與「答案卷」各一份。
- 2.請核對「答案卷」左上角的編號與自己的評量證編號是否一致，若有錯誤請立即舉手請求查對更正。
- 3.可利用「試題本」空白處計算。
- 4.試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。
- 5.作答時，不可使用有量角功能之工具。
- 6.交卷時，「試題本」務必連同「答案卷」一併送交監試人員，然後離場。
- 7.依試場規則，「答案卷」不得書寫姓名、評量證編號或任何標記。若故意汙損「答案卷」，或在「答案卷」顯示自己身分者，由本校鑑定工作小組依違規情節扣分。

### 測驗說明

- 1.考試時間為 100 分鐘。
- 2.「試題本」採單面印刷，共 3 頁。多重選擇題共 1 題，填充題共 8 題，計算證明題共 2 題。
- 3.「答案卷」採單面印刷，共 4 頁。

### 作答方式

- 1.務必在「答案卷」的正確位置作答，更正時，可以使用修正液（帶）。
- 2.未使用藍、黑色鋼筆或原子筆書寫於「答案卷」，或書寫不清，致評閱人員無法辨識答案，其責任自行負責，不得提出異議。

請聽到考試開始的信號聲後，於「試題本」右上角方格內填入自己的評量證編號，

再翻頁作答。

一、多重選擇題：本大題為一題多重選擇題，五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的；五個選項全部答對者得 8 分，只答錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個或三個選項以上得 0 分，未作答者得 0 分。答錯選項的定義為「沒選正確的選項」或「選了不正確的選項」。共計 8 分。

1. 已知 104 年 10 月 1 日起，計程車車資調漲前後計算標準如下表：

舊制車資：

里程 $x$ 公里	$0 < x < 1.25$	$1.25 \leq x < 1.5$	$1.5 \leq x < 1.75$	...
舊制車資(元)	70	75	80	...

新制車資：

里程 $x$ 公里	$0 < x < 1.25$	$1.25 \leq x < 1.45$	$1.45 \leq x < 1.65$	...
新制車資(元)	70	75	80	...

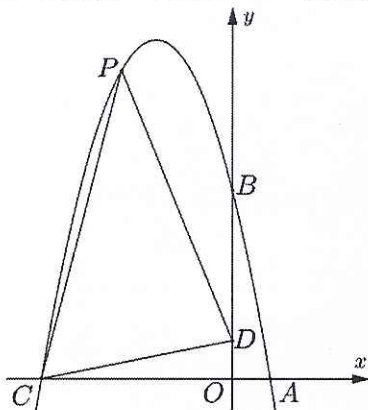
兩者均是 1.25 公里前起程價 70 元，當 1.25 公里時，加收 5 元，車資都是 75 元；超過 1.25 公里時，舊制是每 250 公尺加收 5 元，新制是每 200 公尺加收 5 元。現將舊制的計程錶與新制的計程錶各一個裝在同一部車內，同時從 0 開始跳錶，試以此兩個計程錶所顯示的車資，選出下列正確的選項。

- (1) 車輛行駛超過 2.05 公里後，新舊制的兩個計程錶絕不可能顯示相同的車資。
- (2) 當舊制車資計程錶顯示 500 元時，則新制的計程錶必顯示 610 或 615 元（其中之一）。
- (3) 當新制車資計程錶顯示 500 元時，則舊制的計程錶必顯示 415 元。
- (4) 當新制車資計程錶顯示 560 元時，則舊制的計程錶必顯示 460 元。
- (5) 無論車輛行駛多少公里，新制計程錶顯示的車資絕不可能超過舊制的 1.25 倍。

二、填充題：本大題共有八題填充題，每題完全答對者得 8 分，未完全答對者得 0 分，共計 64 分。

1. 設  $n$  為正整數，且  $1 \leq n \leq 2016$ ，已知  $10n^2 + 3n - 10$  是 30 的倍數，求滿足條件的正整數  $n$  共有\_\_\_\_\_個。

2. 在平面直角坐標系中， $O$  為原點，已知  $A(1, 0)$ 、 $B(0, 5)$ ，將  $\triangle AOB$  以  $O$  為中心逆時針旋轉  $90^\circ$ ，得到  $\triangle DOC$ ，且  $C$  點在  $x$  軸上，設拋物線  $y = ax^2 + bx + c$  (其中  $a, b, c$  為實數，且  $a \neq 0$ ) 過  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點，點  $P$  為第二象限內拋物線上的動點，求  $\triangle PCD$  的面積的最大值\_\_\_\_\_。



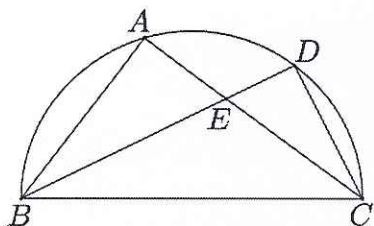


3. 依序將正整數  $1, 2, 3, \dots$  的平方數排成一個數字串： $149162536496481100121144169\dots$ ，排在第 1 個位置的數字是 1，排在第 10 個位置的數字是 4，排在第 18 個位置的數字是 0，排在第 520 個位置的數字為  $a$ ，排在第 521 個位置的數字為  $b$ ，排在第 522 個位置的數字為  $c$ ，求數對  $(a, b, c)$ \_\_\_\_\_。

4. 已知實數  $a, b, c$  成等差數列，且  $0 < a \leq b \leq c$ ，設一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  只有一個實根，求此實根\_\_\_\_\_。

5. 已知  $a, b, c, d$  為相異實數，滿足  $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{a}$ ，求  $\frac{b}{ab+1}$  之值\_\_\_\_\_。

6. 設點  $A, D$  均在以  $\overline{BC}$  為直徑的半圓上，且點  $D$  是弧  $\widehat{AC}$  的中點， $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  交於點  $E$ ，設  $\overline{AE} = 6\sqrt{5}$ ， $\overline{CD} = 20$ ，求  $\overline{AB}$  的長度\_\_\_\_\_。



7. 數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  的每一項均為正整數，且此數列為遞增數列(即  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$ )，已知

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ ，其中  $n$  為正整數，若  $a_6 = 280$ ，則  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$  之值為\_\_\_\_\_。

8. 已知整係數多項式  $f(x) = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ ，其中  $a, b, c, d, e, f, g$  為不大於 10 的相異正整數，若  $x^3 + x^2 + x + 1$  為  $f(x)$  的因式，則滿足條件的多項式  $f(x)$  有\_\_\_\_\_個。

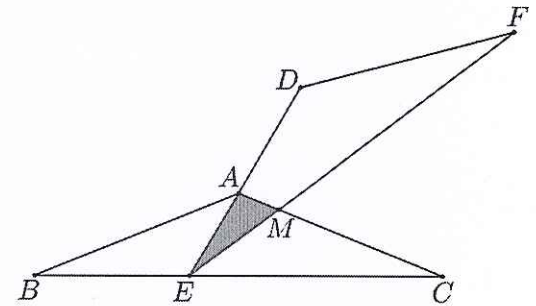
三、計算證明題：本大題共有兩題計算證明題，第一題 15 分，第二題 13 分，共計 28 分，子題配分標於題末。必須寫出推導演算過程或敘明理由，否則將予以扣分。

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 24$ ，且 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，將 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 疊合在一起， $\triangle ABC$ 不動， $\triangle DEF$ 移動，並滿足：點 $E$ 在邊 $\overline{BC}$ 上沿 $B$ 到 $C$ 的方向移動(但點 $E$ 異於 $B, C$ 兩點)，且 $\overline{DE}$ 始終過點 $A$ ， $\overline{EF}$ 與 $\overline{AC}$ 交於點 $M$ 。請回答下列各子題：

(1) 在 $\triangle DEF$ 移動過程中， $\triangle AEM$ 能否構成等腰三角形？若能，求出 $\overline{BE}$ 的長度；若不能，請說明理由。(8 分)

(2) 求線段 $\overline{AM}$ 長度的最小值。(4 分)

(3) 當線段 $\overline{AM}$ 長度最小時，求 $\triangle AEM$ 的面積。(3 分)



2. 設圓 $O$ 為以 $O$ 點為圓心的圓， $P$ 為圓 $O$ 外一點， $\overline{OP}$ 與圓 $O$ 的交點為 $R$ ，過 $P$ 作圓 $O$ 的兩條切線，切點分別為 $A, B$ ，設 $Q$ 為 $\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點，過 $Q$ 作圓 $O$ 的任意一條弦 $\overline{CD}$ 。請回答下列各子題：

(1) 證明： $P, C, O, D$ 四點共圓。(5 分)

(2) 證明：點 $R$ 為 $\triangle PCD$ 的內心。(8 分)

