

國立台灣師範大學附屬高級中學九十九學年度科學能力競賽第一階段數學試題

請將答案填答於第 2 頁之答案欄

- 末四位為 9009 的完全平方數中，最小的是 \_\_\_\_\_。
- 設  $\theta$  為銳角，則  $9\sec^2\theta + 4\csc^2\theta + 12\sec\theta\csc\theta$  之最小值 = \_\_\_\_\_。
- 設  $z_1, z_2$  為複數，滿足  $|z_1| = |z_2|$ ，且  $z_1 - z_2 = 1 - 2i$ ，則  $\frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1 \cdot z_2|}$  之值 = \_\_\_\_\_。
- $x, y \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$ ，試解聯立方程式  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$ ，數對  $(x, y) =$  \_\_\_\_\_。
- $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2009^2} + \frac{1}{2010^2}} =$  \_\_\_\_\_。
- 已知實數  $x_1, x_2, \dots, x_6$  滿足  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 3 \end{cases}$ ，則  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_6$  的最大值為 \_\_\_\_\_。
- $S = \{1, 2, \dots, 2010\}$ ，若  $A$  為  $S$  的子集且以  $A$  中的任兩個相異元素為邊長，能唯一決定一個等腰三角形，則  $A$  中的相異元素個數至多為 \_\_\_\_\_。
- 已知自然數  $n, m$  使得  $2^8 + 2^{11} + 2^n = m^2$ ，數對  $(m, n) =$  \_\_\_\_\_。
- 數列 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, ... 的構成方式為以奇數 1 為第一項，而後接著兩個後續的偶數，再接著三個後續的奇數，再接著四個後續的偶數，... 如此進行下去，則此數列的第 2010 項為 \_\_\_\_\_。
- 設  $a_0 = \frac{1}{2}$  且  $a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$  則  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n (1 - a_n)$  之值為 \_\_\_\_\_。
- 在給定的凸五邊形  $ABCDE$  中， $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEA, \triangle EAB$  的面積皆為 1，則五邊形  $ABCDE$  的面積為 \_\_\_\_\_。
- 空間中  $\begin{cases} 0 \leq x + 2y \leq 4 \\ -1 \leq x - 3y + z \leq 3 \\ 1 \leq x + 3y - 2z \leq 7 \end{cases}$  所圍成的平行六面體體積是 \_\_\_\_\_。
- 已知  $x^2 - x - 1$  能整除整係數多項式  $ax^{17} + bx^{16} + 1$ ，則  $a =$  \_\_\_\_\_。

14. E 為正方形 ABCD 內之一動點, 若 E 到 A,B,C 三點的距離和最小為  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ , 則正方形 ABCD 的邊長為 \_\_\_\_\_。
15. 多項式  $f(x)$  的次數為 99, 若  $f(k) = \frac{1}{k}$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, 100$ , 則  $f(-1) =$  \_\_\_\_\_。

答案欄

1	2259009	2	$13 + 9\sqrt[3]{12} + 6\sqrt[3]{18}$	3	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
4	$\left(\frac{5 \pm \sqrt{151}i}{2}, \frac{5 \mp \sqrt{151}i}{2}\right)$	5	$2009 \frac{2009}{2010}$	6	$\frac{1}{16}$
7	11	8	(80,12)	9	3957
10	$\frac{\pi^2}{18}$	11	$\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$	12	$\frac{32}{3}$
13	987	14	2	15	100

班級

座號

姓名