因數倍數問題研究

陳敏晧

國立蘭陽女中數學教師

一、前言

日前全國高中數學模擬考出現下列試題，引發老師與學生們極大的興趣。數學科普作家馬丁·加德納 (Martin Gardner, 1914-2010) 曾說：「若九位數的首位數是 1 的倍數，前兩位數是 2 的倍數，前三位數是 3 的倍數，…，前 n 位數是 n 的倍數，前九位數是 9 的倍數，但是 1,2,3,4,5,6,7,8,9 只能用過一次。」請問下列哪一個九位數符合要求？

(1)187654923　(2)987654321　(3)789456132　(4)381654729　(5)147285936

試題解析：

(1) 因為187654923的前三位數187 不是 3 的倍數，(錯)。

(2) 因為987654321的前七位數9876543 不是 7 的倍數，(錯)。

(3) 因為789456132 的前四位數7894 不是 4 的倍數，(錯)。

(4) 若此九位數為381654729，則

$$1|3, 2|38, 3|381, 4|3816, 5|38165, 6|381654, 7|3816547, 8|38165472, 9|381654729$$

，(對)。

(5) 因為147285936的前五位數14728 不是 5 的倍數，(錯)。

所以，正確的選項為(4)。

由於此題是從結果去檢驗問題，大部分學生都能迎刃而解，但是，如何算出正確答案381654729？又答案是唯一嗎？

二、倍數判別法則

首先定義因數與被數。兩個整數，當除數可以整除被除數，則除數稱為被除數的因數，而被除數稱為除數的倍數。轉換成數學意涵，若 $a,b \in Z$ ，存在 $c \in Z$ ，使得 $b = c \cdot a$ ，則稱 b 為 a 的倍數，a 為 b 的因數，以符號 $a|b$ 表示。值得注意的是，0 是任意整數 (除了 0) 的倍數。接著，討論倍數的判別法。以六位數 $n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = a_5 \times 10^5 + a_4 \times 10^4 + a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$ ，其中 $a_5 \neq 0$ 且 $a_5, a_4, a_3, a_2, a_2, a_1, a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 說明。

(一) 判別 2, 4, 8 的倍數

(1) 若 $n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $2|n$ ，則 $2|a_0$ ，即 n 的個 (末) 位為 2 的倍數。

證明：因為

$$n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0=a_5\times10^5+a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$
$$=2(a_5\times5\times10^4+a_4\times5\times10^3+a_3\times5\times10^2+a_2\times5\times10+a_1\times5)+a_0$$

當 $2|n$ ，則 $2|a_0$ 必成立。

(2) 若 $n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $4|n$ ，則 $4|a_1a_0$ ，即 n 的末兩位為 4 的倍數。

證明：因為

$$n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0=a_5\times10^5+a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$
$$=4(a_5\times25\times10^3+a_4\times25\times10^2+a_3\times25\times10^1+a_2\times25)+a_1\times10+a_0$$

當 $4|n$ ，則 $4|a_1a_0$ 必成立。

(3) 若 $n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $8|n$ ，則 $8|a_2a_1a_0$ ，即 n 的末三位為 4 的倍數。

證明：因為

$$n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0=a_5\times10^5+a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$
$$=8(a_5\times125\times10^2+a_4\times125\times10^1+a_3\times125)+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$

當 $8|n$ ，則 $8|a_2a_1a_0$ 必成立。

(二) 判別 3, 9 的倍數

(1) 若 $n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $3|n$ ，則 $3|(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$ ，即 n 的數字和為 3 的倍數。

證明：因為

$$n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0=a_5\times10^5+a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$
$$=3(a_5\times33333+a_4\times3333+a_3\times333+a_2\times33+a_1\times3)+(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$$

當 $3|n$ ，則 $3|(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$ 必成立。

(2) 若 $n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $9|n$ ，則 $9|(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$ ，即 n 的數字和為

9 的倍數。

證明：因為

$$n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = a_5 \times 10^5 + a_4 \times 10^4 + a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
$$= 9(a_5 \times 11111 + a_4 \times 1111 + a_3 \times 111 + a_2 \times 11 + a_1 \times 1) + (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$$

當 $9|n$ ，則 $9|(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$ 必成立。

(三) 判別 5 的倍數

若 $n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $5|n$ ，則 $5|a_0$ ，即 n 的個 (末) 位為 5 的倍數，也就是個 (末)位為 0 或 5。

證明：因為

$$n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = a_5 \times 10^5 + a_4 \times 10^4 + a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
$$= 5(\mathrm{a}_5 \times 2 \times 10^4 + \mathrm{a}_4 \times 2 \times 10^3 + \mathrm{a}_3 \times 2 \times 10^2 + \mathrm{a}_2 \times 2 \times 10 + a_1 \times 2) + \mathrm{a}_0$$

當 $5|n$ ，則 $5|a_0$ 必成立。

(四) 判別 7、11、13 的倍數

若 $n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $7|n$ ，則 $7|(a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3)$ ；同理，若 $11|n$ ，則 $11|(a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3)$ ；同理，若 $13|n$ ，則 $13|(a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3)$ 。

證明：因為

$$n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = a_5a_4a_3 \times 10^3 + a_2a_1a_0 = a_5a_4a_3 \times (1001 - 1) + a_2a_1a_0$$
$$= 7 \times 11 \times 13 \times a_5a_4a_3 + (a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3)$$

得證。

(五) 判別 11 的倍數的另一種方法

若 $n = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ ，且 $11|n$ ，則 $11|(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5)$ 。

證明：因為

$$n=a_5a_4a_3a_2a_1a_0=a_5\times10^5+a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$
$$=a_0+a_1\times(11-1)+a_2\times(99+1)+a_3\times(1001-1)+a_4\times(9999+1)+a_5\times(100001-1)$$
$$=(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5)+11\times(a_1+9a_2+91a_3+909a_4+9091a_5)$$

得證。

以上為的常見判別法。若 n 為 6 的倍數，則 n 必為 2 的倍數且 n 必為 3 的倍數，因此，無需另外證明。

三、真的只有一個？

上述模擬考問題可轉換成數學意涵。若九位數 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$，

$$\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

$$1|A_1, 2|A_1A_2, 3|A_1A_2A_3, 4|A_1A_2A_3A_4, 5|A_1A_2A_3A_4A_5, 6|A_1A_2A_3A_4A_5A_6, 7|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$$

$$8|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8, 9|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$$ 。

(一) 因為 $5|A_1A_2A_3A_4A_5$，根據 5 的倍數判別法則，得 $A_5=0,5$，但是 $A_5\neq0$，確定 $A_5=5$。

(二) 因為 $2|A_1A_2, 4|A_1A_2A_3A_4, 6|A_1A_2A_3A_4A_5A_6, 8|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，則 $\{A_2,A_4,A_6,A_8\}=\{2,4,6,8\}$，同時確定 $\{A_1,A_3,A_7,A_9\}=\{1,3,7,9\}$。

1. $\because 8|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8 \therefore 8|A_6A_7A_8$，即 $8|(100A_6+10A_7+A_8)$，因為 $A_6\in\{2,4,6,8\}$，則 $8|100A_6$ 恆成立，因此，$8|(10A_7+A_8)$，此時 $A_7\in\{1,3,7,9\}$，檢驗得數對 $(A_7,A_8)=(1,6),(3,2),(5,6),(7,2)$。

2. $\because 4|A_1A_2A_3A_4 \therefore 4|A_3A_4$，因此，$4|(10A_3+A_4)$，此時 $A_3\in\{1,3,7,9\}$，檢驗得數對

   $(A_3,A_4)=(1,2),(1,6),(3,2),(3,6),(7,2),(7,6),(9,2),(9,6)$。

由 1.2.的結論得：數對 $(A_4,A_8)=(2,6),(6,2)$，因為

$\{A_2,A_4,A_6,A_8\}=\{2,4,6,8\}$，進一步得數對

$\left(A_2, A_4, A_6, A_8\right)=\left(4,2,8,6\right),\left(8,2,4,6\right),\left(4,6,8,2\right),\left(8,6,4,2\right)$四種可能。

(三) 因為$3|A_1A_2A_3, 6|A_1A_2A_3A_4A_5A_6, 9|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$，其中 $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9=1+2+...+9=45=9\times5$恆為 9 的倍數。因為$6|A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，所以$3|A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，得

$$3|(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6)-(a)\text{；}$$

又因為$3|A_1A_2A_3$，所以

$$3|(A_1+A_2+A_3)-\left(b\right)\text{，}$$

由$(a)(b)$得知$3|(A_4+A_5+A_6)$，將$A_5=5$代入，又

$\left(A_4, A_6\right)=\left(2,8\right),\left(2,4\right),\left(6,8\right),\left(6,4\right)$代入檢驗得可能數對

$\left(A_4, A_5, A_6\right)=\left(2,5,8\right),\left(6,5,4\right)$，目前的可能組合為

$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)=\left(A_1,4,A_3,2,5,8,A_7,6,A_9\right),\left(A_1,8,A_3,6,5,4,A_7,2,A_9\right)$

(四) 重新考慮$8|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$代入上述的第一個組合

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)=\left(A_1,4,A_3,2,5,8,A_7,6,A_9\right)\text{，}$$

得$8|8A_76$，所以，$8|(800+10A_7+6)$，得$8|(10A_7+6)$，又$A_7\in\{1,3,7,9\}$，檢驗得$A_7=1或9$。

1. 若$A_7=1$，則$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)=\left(A_1,4,A_3,2,5,8,1,6,A_9\right)$，得

   $\left\{A_1, A_3, A_9\right\}=\left\{3,7,9\right\}$。

   (1) 若$A_1=3$，則$3|34A_3$，當$A_3=7,9$(皆不合)。

   (2) 若$A_1=7$，則$3|74A_3$，當$A_3=3,9$(皆不合)。

   (3) 若$A_1=9$，則$3|94A_3$，當$A_3=3,7$(皆不合)。

2. 若 $A_7=9$，則 $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(A_1,4,A_3,2,5,8,9,6,A_9)$，得

$\{A_1,A_3,A_9\}=\{1,3,7\}$。

(1) 若 $A_1=1$，則 $3|14A_3$，當 $A_3=3$(不合)；當 $A_3=7$(合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(1,4,7,2,5$，

檢驗 7 的倍數，但1472589不是 7 的倍數 (不合)。

(2) 若 $A_1=3$，則 $3|34A_3$，當 $A_3=1,7$(皆不合)。

(3) 若 $A_1=7$，則 $3|74A_3$，當 $A_3=3$(不合)；當 $A_3=1$(合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(7,4,1,2,5,8,9,6,A_9)$，

檢驗 7 的倍數，但7412589不是 7 的倍數 (不合)。

(五) 重新考慮 $8|A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 代入上述的第二個組合

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(A_1,8,A_3,6,5,4,A_7,2,A_9)$，

得 $8|4A_72$，所以，$8|(400+10A_7+2)$，得 $8|(10A_7+2)$，

又 $A_7\in\{1,3,7,9\}$，檢驗得 $A_7=3$或7。

1. 若 $A_7=3$，則 $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(A_1,8,A_3,6,5,4,3,2,A_9)$，

得 $\{A_1,A_3,A_9\}=\{1,7,9\}$。

(1) 若 $A_1=1$，則 $3|18A_3$，當 $A_3=7$(不合)；當 $A_3=9$(合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(1,8,9,6,5,4,3,2,A_9)$，

檢驗 7 的倍數，但1896543不是 7 的倍數 (不合)。

(2) 若 $A_1=7$，則 $3|78A_3$，當 $A_3=1$(不合)；當 $A_3=9$(合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=(7,8,9,6,5,4,3,2,A_9)$，

檢驗 7 的倍數，但7896543不是 7 的倍數 (不合)。

(3) 若 $A_1=9$，則 $3|98A_3$，當 $A_3=1$(合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(9,8,1,6,5,4,3,2,A_9\right)$，

檢驗 7 的倍數，但 9816543 不是 7 的倍數(不合)；

當 $A_3=7$(合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(9,8,7,6,5,4,3,2,A_9\right)$，

檢驗 7 的倍數，但 9876543 不是 7 的倍數 (不合)。

2. 若 $A_7=7$，則 $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(A_1,8,A_3,6,5,4,7,2,A_9\right)$，

得 $\{A_1,A_3,A_9\}=\{1,3,9\}$。

(1) 若 $A_1=1$，則 $3|18A_3$，當 $A_3=3$ (合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(1,8,3,6,5,4,7,2,A_9\right)$，

檢驗 7 的倍數，1836547 不是 7 的倍數 (不合)；

當 $A_3=9$ (合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(1,8,9,6,5,4,7,2,A_9\right)$，

檢驗 7 的倍數， 1896547 不是 7 的倍數(不合)。

(2) 若 $A_1=3$，則 $3|38A_3$，當 $A_3=9$ (不合)；當 $A_3=1$ (合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(3,8,1,6,5,4,7,2,A_9\right)$，

檢驗 7 的倍數，3816547 是 7 的倍數 (合)，得 $A_9=9$，所以，

381654729 從頭一一檢驗之，皆合。

(3) 若 $A_1=9$，則 $3|98A_3$，當 $A_3=3$ (不合)；當 $A_3=1$ (合)，此時，

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9)=\left(9,8,1,6,5,4,7,2,A_9\right)$，

檢驗 7 的倍數，9816547 不是 7 的倍數 (不合)。

正確的九位數真的只有一個，381654729。

九位數中若 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 只能用一次，其中首位數是 1 的倍數，前兩位數是 2 的倍數，前三位數是 3 的倍數,…, 前八位數是 8 的倍數，九位數是 9 的倍數，此數必為 381654729。

這個模擬考題目很值得玩味，很適合對數學有興趣的學生研究，尤其可當數理資優班的習題作業。在解題的過程中可以訓練學生的耐心與毅力，更可以感受到倍數判別法的重要性。