

2014 " 希望杯 " 數學邀請賽 【複試】

高一

請不要翻到次頁！
閱讀完本頁作答說明，並聽從監試委員的指示再開始作答！

測驗說明

題本採雙面印刷，題目共 23 題 (第一部份選擇題 10 題，每題 4 分。第二部份選填題 10 題，每題 5 分。第三部份計算題 3 題，每題 10 分。合計 120 分) 。測驗時間從 9:00 到 11:00，共 120 分鐘。作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

注意事項

1. 可利用題本中空白部份計算，切勿在答案卡上計算。
2. 答案卡上不得做任何記號。答案卡若汙損或損壞，本測驗不予計分。
3. 開始作答前，請先填寫答案卡與計算卡上方個人資料，並畫記參加年級及准考序號，再開始作答。若未填寫或畫記清楚者，不予計分。

作答方式

請依照題意解出答案，並用 2B 鉛筆在答案卡上相應的位置畫記，請務必將選項塗黑、塗滿。如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，重新塗黑答案。例如答案為 5，則將 [5] 塗黑、塗滿，即：[1][2][3][4][5][6][7][8][9][0]

電腦閱卷卡

1. 手寫欄的部分用原子筆或鋼筆填寫。
2. 請用 HB 或 2B 鉛筆畫記清楚年級和准考序號欄位 []，再開始作答。
3. 畫線要粗黑、清晰、塗滿格不可出格，用橡皮擦拭要清潔，若畫線過輕或污損不清使機器無法識別，由考生自行負責。

希望杯數學邀請賽 電腦閱卷答題卡											
編字: _____ 學校: _____ 年級: _____ 姓名: _____	考號: _____										
注意事項 1. 手寫欄的部分用原子筆或鋼筆填寫。 2. 請用 HB 或 2B 鉛筆畫記清楚年級和准考序號欄位。 3. 畫線要粗黑、清晰、塗滿格不可出格，用橡皮擦拭要清潔。若畫線過輕或污損不清使機器無法識別，由考生自行負責。 正確: <input checked="" type="checkbox"/> 錯誤: <input type="checkbox"/>	季賽年級 <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>初一</td><td>初二</td><td>初三</td><td>高一</td><td>高二</td> </tr> <tr> <td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td> </tr> </table> 准考序號 <input type="checkbox"/> 由監試人員劃記 (最考人請勿劃記)	初一	初二	初三	高一	高二	○	○	○	○	○
初一	初二	初三	高一	高二							
○	○	○	○	○							
答題欄 ① [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ② [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ③ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ④ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑤ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑥ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑦ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑧ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑨ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑩ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑪ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑫ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑬ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑭ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑮ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑯ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑰ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑱ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑲ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ⑳ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ㉑ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ㉒ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ㉓ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ㉔ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] ㉕ [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0]	答題欄 26 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 27 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 28 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 29 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 30 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 31 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 32 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 33 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 34 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 35 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 36 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 37 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 38 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 39 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 40 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 41 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 42 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 43 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 44 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 45 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 46 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 47 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 48 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0] 49 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0]										

計算題作答卡

1. 請用原子筆 (黑色、藍色) 或鋼筆填寫。
2. 盡可能在規定欄位內作答完畢。若書寫欄位不足可跨欄作答，但需註明題號。
3. 若作答卡不夠，可舉手向監考老師索取備用作答卡。

希望杯數學邀請賽 計算題作答卡 准考序號: □□□□□□□□ 學校: _____ 參賽年級: _____ 姓名: _____
題號: _____ _____ _____ _____ _____
* 若算式過長，可跨欄填寫，但請標明題號。

一、選擇題

1. “ $x > y > 1$ ”是“ $\log_x y < \log_y x$ 成立”的 ①。
- (1) 充分但不必要條件 (2) 必要但不充分條件
(3) 充分必要條件 (4) 既不充分也不必要條件
2. 已知 $f(x) = x^2 - 4x^3 + 10x^2 - 27$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $A = \{x | f(x) > 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0 \text{ 且 } x \in A\}$, 則 B 中元素的個數是 ②。
- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 無窮多
3. If $y^2 = 2x$ where x and y are real numbers, then the minimum value of $z = y^2 + x^2 + 4$ is ③。
- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6
4. 設 $f(x)$ 是 R 上的偶函數, 並且 $f(x+6) = f(x) + f(3)$, 若 $f(2) = 2014$, 則 $f(2014)$ 等於 ④。
- (1) 2012 (2) 2013 (3) 2014 (4) 2015
5. 若關於 x 的方程 $\left| 2^x - 3 \right| - k = 0$ 有兩個不相等的實數根, 則 k 的取值範圍是 ⑤。
- (1) $[0, 3)$ (2) $(0, 3)$ (3) $[0, +\infty)$ (4) $(-\infty, 3)$
6. 已知 x, y 是實數, 且 $y = 2x + \sqrt{8-x}$, 則 y 的最大值是 ⑥。
- (1) 6 (2) $\frac{25}{4}$ (3) $\frac{97}{8}$ (4) $\frac{129}{8}$
7. 若對於任意的實數 x , 不等式 $|x-1| - |x-a| \leq 10$ 恒成立, 則 a 的取值範圍是 ⑦。
- (1) $[-3, 4]$ (2) $[-4, 3]$ (3) $[-9, 11]$ (4) $[-11, 9]$
8. 若函數 $f(x) = x^2 - 2a|x-a| - 2ax + 1$ 有且僅有 3 個零點, 則實數 a 的值是 ⑧。
- (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2
9. 若 $\lambda < 4x + y$ 對一切滿足 $\log_{\frac{1}{2}}(3x-6) < \log_{\frac{1}{2}}(x-y-1)$ 的 x, y 都成立, 則實數 λ 的最大值是 ⑨。
- (1) 0 (2) 4 (3) 9 (4) 13

10. 已知 $\{a_n\}$ 是等比數列，且 $a_n > 0$ ， $a_4 + a_3 - a_2 - a_1 = 5$ ，則 $a_5 + a_6$ 的最小值是 ⑩。
 (1) 10 (2) 14 (3) 16 (4) 20

二、填充題

11. 函數 $f(x) = 2^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x + \frac{9}{x}\right)}$ 的定義域是 $\{x \mid x > \text{⑪}\}$ 。

12. 若方程 $x^2 + (2m-2)x + m^2 + 3 = 0$ 有兩個不相等的實根 x_1 、 x_2 ，那麼， $x_1^2 + x_2^2$ 的取值範圍是 $\{y \mid y > \text{⑫}\}$ 。

13. 已知函數 $f(x) = x^{\frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}k + 2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是奇函數，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函數，則 k 的值是 1 或 ⑬。

14. 若函數 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$ 則不等式 $x + (x+1)f(x+1) \leq 3$ 的解集是 $\{x \mid x \leq \text{⑭}\}$ 。

15. 在等差數列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 2$ ， $\frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ 為常數 k ，則 $\{a_n\}$ 的前 10 項的和 $S_{10} = 20$ 或 ⑮⑯⑰。

16. 設 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的減函數，且 $f(0) = 3$ ， $f(3) = -1$ 。已知 $P = \{x \mid |f(x+t) - 1| < 2\}$ ， $Q = \{x \mid f(x) < -1\}$ ，若 P 是 Q 的真子集，則實數 t 的取值範圍是 $\{t \mid t \leq \text{⑱⑲}\}$ 。

17. 若函數 $f(x) = (a+2)x^2 - ax + (2a-1)$ 的兩個零點分別在區間 $(-2, -1)$ 和區間 $(0, 1)$ 內，則 a 的取值範圍是 $\left\{a \mid -\frac{\text{⑳}}{\text{㉑}} < a < -\frac{\text{㉒}}{\text{㉓}}\right\}$ 。

18. 若關於 x 的不等式 $2kx^2 > (x-2)^2$ 恰有 4 個整數解，則實數 k 的取值範圍是 $\left\{k \mid \frac{\text{㉔}}{\text{㉕}\text{㉖}} < k \leq \frac{\text{㉗}}{\text{㉘}}\right\}$ 。

19. 若拋物線 $y = x^2 - tx + 1$ 與直線 $y = -1$ 有兩個不同的交點，
則 t 的取值範圍是 $\{t \mid t < -\textcircled{29}\sqrt{\textcircled{30}} \text{ 或 } t > \textcircled{31}\sqrt{\textcircled{32}}\}$ 。

20. As shown in Fig.1, $\overline{AB} = 6, \overline{BC} = 8, \overline{CA} = 10$.

Point P is inside of the triangle ABC .

$\overline{DE}, \overline{FG}$ and \overline{IH} all pass point P
and are parallel to $\overline{AB}, \overline{BC}$ and \overline{CA} respectively.

The lengths of $\overline{DE}, \overline{FG}$ and \overline{IH} are all equal to d , then $d = \frac{\textcircled{33}\textcircled{34}\textcircled{35}}{\textcircled{36}\textcircled{37}}$.

(英漢小詞典：parallel 平行)

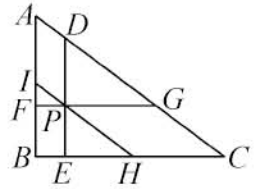


Fig.1

三、計算題

21. 記 $f(x) = \log(3 - |x - 1|)$ 的定義域為 A ，集合 $B = \{x \mid x^2 - (a + 1)x + a < 0\}$ 。

若 $A \cap B = B$ ，求實數 a 的取值範圍。

22. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分別是角 A, B, C 的對邊，已知 $8(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b)\sin B$

，且 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑是 4。

(1) 求角 C ；(5%)

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面積的最大值。(5%)

23. 已知函數 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($x \neq 0, a \in R$)

(1) 判斷函數 $f(x)$ 的奇偶性；(5%)

(2) 當 $x \in [2, +\infty)$ 時，若 $f(x)$ 是增函數，求實數 a 的取值範圍。(5%)