2013年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題

2012年 12 月 9 日

說明: 本試題有兩頁共五題, 每題七分。
將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。
答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。

一、(7分) 已知 O 是 正 $\triangle ABC$ 內一點, 滿足 $\angle AOB : \angle BOC : \angle COA = 6 : 5 : 4$. 現在以邊長 $a = \overline{OA}, b = \overline{OB}, c = \overline{OC}$ 做成一個新的三角形, 而此三角形邊 a, b 與 c 的對頂角分別爲 α, β 與 γ. 則 $\alpha : \beta : \gamma = \underline{①:②:③}$. (化成最簡整數比。)
Ans. $5:3:7$

二、(7分) 令函數 f 爲正實數映射到實數, 且滿足下列條件:

(i) f 是嚴格遞增函數;
(ii) 對任意的正實數 x, 滿足不等式 $f(x) > \frac{-1}{x}$;
(iii) 對所有的正實數 x, 滿足等式 $f(x)f(f(x) + \frac{1}{x}) = 1$.

依照以上條件 $f(2) = \underline{\dfrac{④⑤\sqrt{⑥}}{⑦}}$. (化成最簡分數。)
Ans. $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

三、(7分) 整數的數列 $(a_1, a_2, \ldots)$ 滿足下列關係式:

$$a_n = \frac{\operatorname{lcm}(a_{n-1}, a_{n-2})}{\gcd(a_{n-1}, a_{n-2})}, \text{ 對所有 } n \geq 3.$$

如果已知 $a_{560} = 560$ 且 $a_{1600} = 1600$, 則 a_{2013} 是 $\underline{⑧}$ 位數字; 而且 a_{2013} 的個位數字是 $\underline{⑨}$, 十位數字是 $\underline{⑩}$.
(註: $\operatorname{lcm}(a, b)$ 與 $\gcd(a, b)$ 分別是 a, b 兩數字的最小公倍數與最大公因數。)
Ans. $a_{2013} = 140$.

四、(7分) 整數對 (x, y) 滿足等式

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

請解出所可能的整數對 (x, y); 一共會有 n 對。再考慮每一對的絕對值和 $|x| + |y|$, 令 m 爲這數的極大值。則 $m + n = \underline{⑪⑫}$.
Ans. 共有 6 對解: $(-1, -1), (0, -1), (-1, 0), (0, 0), (-6, 2), (5, 2)$; 所以 $m + n = 14$.

五、數列 $(b_0, b_1, \ldots)$ 滿足下列遞迴關係:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1; \\ b_n &= b_{n-1} + \left[\sqrt{b_{n-1}}\right], \text{ 對所有 } n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) (3分) 若 $b_k = 4096$, 則 $k = \underline{⑬⑭⑮}$.

(b) (4分) 試問 $b_{543} = \underline{⑯⑰⑱⑲⑳}$.

(註: $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。)

Ans. (a) $b_{132} = 4096$. (b) $b_{543} = 72068$.