國立台南女中九十七學年度第一次教師甄選　數學科試題

一、 填充題：共 65 分

第一部份：每格 4 分，共 20 分

1. 設α，β，γ 均為複數，則下列敘述何者為真 ? 答 :________(完全正確才給分)
   (A) 若 $\alpha-\beta>0$，則 $\alpha>\beta$
   (B) 若 $\alpha^2+\beta^2=0$ 則 $\alpha=\beta=0$
   (C) 若$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ 均為實數，則 α，β 均為實數
   (D) 若 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ 則 $\alpha=\beta=\gamma$
   (E) 若 $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ 均為實數，則α，β，γ 均為實數

2. 設$w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ，若A(1)，B(w)，C(w^2)，D(w^3)，E(w^4)為複數平面上五個點，試求 : $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}$ 之值 =________。

3. 設$\left(2+x+x^2\right)^{1004}=\sum_{n=0}^{2008}A_n x^n$，其中 A_n 為實數，則$\sum_{k=0}^{1004}(-1)^k A_{2k}$ 等於 ________。

4. 雙曲線：$xy=2$，有一光線從 $P(-10,2)$ 出發，射到雙曲線上一點 $A_1(1,2)$，反射後的光線會碰到雙曲線上另一點 A_2，依此類推，試求$\lim_{n\to\infty}\overline{A_nA_{n+1}}$=________

5. θ為任意實數，令 $x=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$， $y=\sin\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，則點$(x,y)$所形成圖形的方程式為________

第二部份：每格 5 分，共 45 分

6. 有一橢圓長軸在直線 x－y+1= 0 上，其一焦點F_1坐標為 (1 , 2)，若此橢圓與 x 軸切於點 B(2 , 0)，試求此橢圓另一焦點F_2的坐標為 ________。

7. 已知a、b、c∈R且函數$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在$x=-1$處有極大值 7，在$x=3$處有極小值，則$y=f(x)$圖形上，斜率最小之切線方程式為 ________。

8. 空間中，點$A(4,3,1)$，在平面$E: x+2y+2z-3=0$上有一圓心$B(-1,-1,3)$，半徑為 4 的圓，圓上的動點P，則線段$\overline{AP}$ 的最大值為________

9. 設$(2n+1)$個樣本資料：$\frac{1}{2n+1},\frac{2}{2n+1},\ldots,\frac{k}{2n+1},\ldots,\frac{2n+1}{2n+1}$的標準差為$S_n$，則 $\lim_{n\to\infty} S_n^2 =$__________

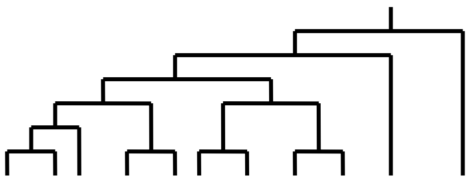
10. 數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$滿足$a_0=1,b_0=1$ 且 $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}, b_n=-a_{n-1}+b_{n-1}$，($n=1,2,3\ldots$)，則 $a_{2008}\times b_{2008}$之值為__________

11. 座標平面上，直線L通過點$A(1,1)$且與曲線$\Gamma: y=f(x)=x^3-4x$相切，則直線L與曲線 $y=f(x)$所圍成封閉區域的面積為__________

12. x,y為實數，已知$x^2-2xy+9y^2=1$，則x^2+y^2的最大值a，最小值b，得$a+b=$__________

13. 滿足$a+b+c+d=abcd$的正整數a,b,c,d有__________組解

14. 某年的大醫盃羽球賽共有 11 所大學報名，台大和陽明也在其中，而每所學校的實力均等，但神奇的是，該年的賽程表如下，而每個學校都還沒有抽籤。請問，冠亞軍決賽時是台大和陽明對決的機率是多少。__________________



二、 計算證明題 ：共 35 分

1. 設 G 是ΔABC 的重心，通過 G 的一直線交$\overline{AB}$於 D，交$\overline{AC}$於 E，若$\overline{AD}=\alpha\overline{AB}$，$\overline{AE}=\beta\overline{AC}$

(1) 試證：$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$為一定值。 (2 分) (2) 試求$\frac{\Delta ADE\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}$的最小值。 (3 分)

2. 設a,b,c,d為實數且$ac=2(b+d)$，

試證：x的方程式$x^2+ax+b=0$與$x^2+cx+d=0$兩者中至少有一個方程式有實根 (6 分)

3. $a_1=1$，$a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}, n\ge 2$，請問此數列收斂或發散並證明之(3 分)，若收斂並請求出其收斂值(3 分)。

4. 已知$a\ge e$，對於$\forall x>a$，試證明$a^x>x^a$ (6 分)

5. $x,y,z\in R$，證明$\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}=\frac{x-y}{1+xy}\times\frac{y-z}{1+yz}\times\frac{z-x}{1+zx}$ (5 分)

6. 求$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=?$(必須寫出過程，不可僅寫簡答) (7 分)