2017 TRML 數學競賽(第 19 屆)個人賽

俞克斌老師編寫

第一回

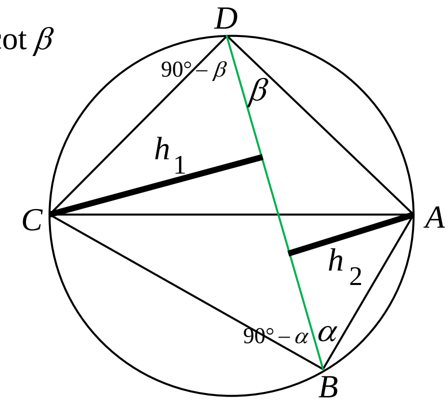
I-1. 凸四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ABC$ 與 $\angle CDA$ 均爲直角，

且 $\tan\angle ABD=\dfrac{2}{3}$ ，$\tan\angle BDA=\dfrac{4}{7}$ ，則 $\dfrac{\Delta BCD\text{ 面積}}{\Delta BAD\text{ 面積}}=$________。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：$\dfrac{21}{8}$ $0°<\theta<90°$

解：$\overline{BD}=h_1\cot\left(90°-\alpha\right)+h_1\cot\left(90°-\beta\right)=h_2\cot\alpha+h_2\cot\beta$



$$\overline{BD}=h_1\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)=h_2\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{4}\right)$$

$$\Rightarrow h_1\times\frac{26}{21}=h_2\times\frac{26}{8}\Rightarrow\frac{h_1}{h_2}=\frac{21}{8}$$

則 $\dfrac{\Delta BCD\text{ 面積}}{\Delta BAD\text{ 面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times h_1}{\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times h_2}=\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{21}{8}$

I-2. 某商店上半年前 4 個月的盈虧情形爲：

一月份、二月份都不賺不賠，三月份賠 6 萬元，四月份賺 18 萬元，

設 k 月份賺了 $f\left(k\right)$ 萬元（若賠錢則 $f\left(k\right)$ 爲負的），其中 $f\left(x\right)$ 爲至多 3 次的多項式，

則 $f\left(x\right)$ 的常數項爲________。 【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：-42

解：
$$f\left(x\right)=0\times\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+0\times\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$
$$+\left(-6\right)\times\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+18\times\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$
$$f\left(0\right)=0+0+\left(-6\right)\times\frac{(-1)(-2)(-4)}{2\times1\times(-1)}+18\times\frac{(-1)(-2)(-3)}{3\times2\times1}=-42$$

I-3. 有一個六位數爲 $2017ab$ ，若無論 a 爲何值，此六位數都不會是 11 的倍數，

則 $b=$________。 【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：6

解：依題意：當 $\left(0+7+b\right)-\left(2+1+a\right)=4+b-a$ 中，無論 a 爲何值，都不能被 11 整除

則表 $b=6$（此時 a 以 $0\sim9$ 代入，原數均不能被 11 整除）

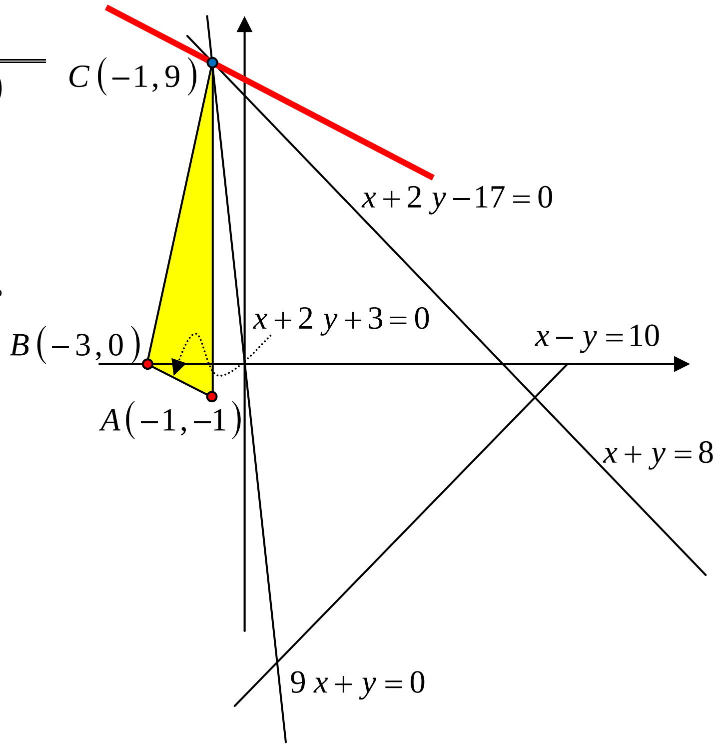
第二回

I-4. 設 $A(-1,-1)$、$B(-3,0)$、$C(a,b)$

滿足 $\begin{cases} a+b\le 8 \\ a-b\le 10 \\ 9a+b\ge 0 \end{cases}$，

則 ΔABC 的面積最大值爲________。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】



答：10

解：$d\left(C(-1,9),\overleftrightarrow{AB}:x+2y+3=0\right)$

$=\dfrac{|-1+18+3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}$

則 ΔABC 的面積最大值

爲 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{20}{\sqrt{5}}=10$

I-5. 設實數 x 滿足 $\log_{5x+4}\left(x^2+4x+4\right)+\log_{x+2}\left(5x^2+14x+8\right)=4$，

則 x 的最小值爲________。【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：$-\dfrac{1}{2}$

解：原式 $\Rightarrow \log_{5x+4}(x+2)^2+\log_{x+2}(5x+4)(x+2)=4$，令 $A=\log_{5x+4}(x+2)$

原式 $\Rightarrow 2A+\dfrac{1}{A}+1=4\Rightarrow 2A^2-3A+1=0\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$ 或 1

故 $\log_{5x+4}(x+2)=\dfrac{1}{2}$ 或 $1\Rightarrow(5x+4)=(x+2)^2$ 或 $(5x+4)=(x+2)$

$\Rightarrow x=0$ 或 1 或 $-\dfrac{1}{2}$

I-6. 令 $a_1=\sqrt{5}+1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$（$n=1$，2，3，……）。

若此數列 $\{a_n\}$ 中前 60 項的總和爲 a，前 60 項的乘積爲 b，

則 $a+b=$________。【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：$46+11\sqrt{5}$

解：$a_1=\sqrt{5}+1$，$a_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$a_3=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$，

而 $a_1+a_2+a_3=\dfrac{45+11\sqrt{5}}{20}$、$a_1\times a_2\times a_3=-1$

$a_4=\sqrt{5}+1$，$a_5=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$a_6=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$，

而 $a_4+a_5+a_6=\dfrac{45+11\sqrt{5}}{20}$ 、 $a_4\times a_5\times a_6=-1$

…（每三項一循環）

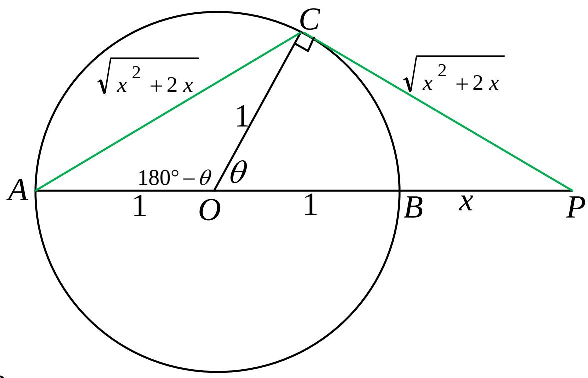
故此數列中前60項的總和爲 $\dfrac{45+11\sqrt{5}}{20}\times 20=45+11\sqrt{5}$ ，前60項的乘積爲 $(-1)^{20}=1$

第三回

I-7. 若圓 O （ O 爲圓心）之直徑爲 $\overline{AB}$ ，在 $\overline{AB}$ 的延長線上取一點 P 使得 B 在 A 、 P 之間，自 P 作圓 O 的切線，令切點爲 C ，若 $\overline{AC}=\overline{PC}$ ，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=$ ________ 。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：$\dfrac{3}{2}$



解：令半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$ 、 $\overline{PB}=x$

則 $\overline{AC}=\overline{PC}=\sqrt{x^2+2x}$

由餘弦定律： $\dfrac{1+1-\left(x^2+2x\right)}{2\times1\times1}=-\dfrac{1}{x+1}$

$\Rightarrow x^3+3x^2-4=0\Rightarrow(x-1)(x+2)^2=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 -2 （不合），則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{1+1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

I-8. 設 a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 ， a_5 皆爲正整數且滿足 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 。令 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ ， $B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$ ，若 $A\cap B=\{a_3,a_4\}$ ， $a_3+a_4=13$ 且 $A\cup B$ 中各數之和爲225，則 $a_5=$ ________ 。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：10

解：因爲 $A\cap B=\{a_3,a_4\}$ ，故 a_3 ， a_4 均爲完全平方數

因爲 $a_3+a_4=13$ ，故 $a_3=4$ 、 $a_4=9$ ，則 $a_1=2$ 、 $a_2=3$ ，

則 $A=\{a_1=2,a_2=3,a_3=4,a_4=9,a_5\}$ ，

而 $B=\{a_1^2=4,a_2^2=9,a_3^2=16,a_4^2=81,a_5^2\}$

由 $A\cup B$ 中各數之和爲225，亦即 $2+3+4+9+a_5+16+81+a_5^2=225\Rightarrow$ 則 $a_5=10$

I-9. 設 a 、 b 皆爲正整數，滿足 $b^2=121(a+2017)$ ，則 $a+b$ 的最小值爲________ 。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

答：503

解： $b^2=121(a+2017)$ 爲完全平方數，故 $a+2017$ 爲完全平方數

當 a 最小爲8時， $b^2=121\times2025\Rightarrow b=11\times45=495$

則 $a+b$ 的最小值爲 $8+495=503$

I-10. 設多項式 $f_k(x)=x^k+k$（$k=1$，2，3，4）。

已知從這四個多項式中任取兩個或三個相異多項式的乘積，可得到 10 個多項式，若 $f(x)$ 爲這 10 個多項式的和，則 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式爲________。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

$\boxed{\text{答}}$：61

$\boxed{\text{解}}$：由，$f(x)=\left\{\begin{aligned}&(x+1)(x^2+2)\\&+(x+1)(x^3+3)\\&+(x+1)(x^4+4)\\&+(x^2+2)(x^3+3)\\&+(x^2+2)(x^4+4)\\&+(x^3+3)(x^4+4)\\&+(x+1)(x^2+2)(x^3+3)\\&+(x+1)(x^2+2)(x^4+4)\\&+(x+1)(x^3+3)(x^4+4)\\&+(x^2+2)(x^3+3)(x^4+4)\end{aligned}\right.$，所求 $f(-1)=\left\{\begin{aligned}&(0)(3)\\&+(0)(2)\\&+(0)(5)\\&+(3)(2)\\&+(3)(5)\\&+(2)(5)\\&+(0)(3)(2)\\&+(0)(3)(5)\\&+(0)(2)(5)\\&+(3)(2)(5)\end{aligned}\right.=61$

I-11. 已知 $k>0$，且三平面 $x-y+z=0$、$2x-ky+5z=0$ 與 $kx+2y+3z=0$ 的交點不只一個，則在它們的交集上，$x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+4$ 的最小值爲________。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

$\boxed{\text{答}}$：-2

$\boxed{\text{解}}$：$\begin{cases}x-y+z=0\\2x-ky+5z=0\\kx+2y+3z=0\end{cases}$ 有無限多解，故 $\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-k&5\\k&2&3\end{vmatrix}=0\xrightarrow{k>0}k=8$

原式 $\begin{cases}x-y+z=0\\2x-8y+5z=0\\8x+2y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-2t\end{cases}$，

故 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+4=6t^2-12t+4=6(t-1)^2-2\geq-2$

I-12. 設有 7 個機器戰警，其戰鬥力分別為：1，3，7，15，31，63，127。
每兩個戰警可合組成一個新的戰警，且新戰警仍可繼續與其他戰警組合；
假設每一次組合戰鬥力的變化規則如下：
『戰鬥力為 x 與 y 的兩個戰警，可合組成戰鬥力為 $x+y+xy$ 的新戰警』。
已知不論組合的次序如何，經過 6 次的重組後，
最後留下來的唯一戰警之戰鬥力都等於 k，則 $\log_2(k+1)$ 之值為_______。

【2017 TRML(第 19 屆)個人賽】

$\boxed{答}$：28

$\boxed{解}$：已知 $\left(2^a-1\right)+\left(2^b-1\right)+\left(2^a-1\right)\left(2^b-1\right)=2^{a+b}-1$，而 $1=1^2-1$，$3=2^2-1$，

$7=2^3-1$，$15=2^4-1$，$31=2^5-1$，$63=2^6-1$，$127=2^7-1$

則 $\log_2(k+1)=\log_2\left(2^{1+2+3+4+5+6+7}-1+1\right)=28$