

106 學年度內湖高中(非官方版本)

1.

2. 圓內接四邊形, $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d$, 設面積為 Δ , $2s = a + b + c + d$, 證明:

(a) $2\Delta = (ad + bc) \sin A$

(b) $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad + bc) \cos A$

(c) $\Delta = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

3. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中, $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n, n = 0, 1, 2, \dots$, 其中 $a_0 \neq a_1$ 。證明

$$f(x) = a_0 C_0^n (1-x)^n + a_1 C_1^n x(1-x)^{n-1} + a_2 C_2^n x^2(1-x)^{n-2} + \dots + a_n C_n^n x^n$$

是 x 的一次式

4. 有一正四面體 $A-BCD$, M, N 為 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 上的一點且滿足 $\overline{AB} = 3\overline{AM}, \overline{AC} = 3\overline{AN}$, 若正四面體體積為 $18\sqrt{2}$, 則 \overrightarrow{MN} 與 \overrightarrow{CD} 兩歪斜線的距離為何?

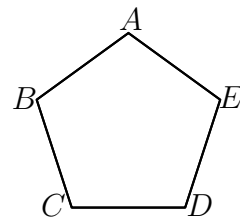
5. 聯立方程組
$$\begin{cases} E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \text{ 設 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(a) 試以幾何觀點說明為何當 $\Delta \neq 0$ 時, 方程組有唯一解

(b) 若 $\Delta = 0$ 且 $\Delta_x = 0$, 則 $\Delta_y = 0, \Delta_z = 0$ 一定對嗎?

6. 內中校園有台灣藍鵲來棲息，每晚都在五棵樹上輪流休息，已知第一晚在 A 樹，第二晚會到相鄰兩樹或留在原處休息(機率皆相同)，試求

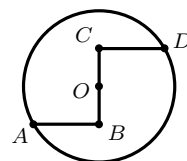


(a) 第一晚在 A 樹，第三晚也在 A 樹的機率為何？

(b) 第六晚在 A 樹，求這六個晚上的棲息順序有幾種？

7. 坐標平面上有一點 P ，對原點旋轉 90° 後，再對 $(\sqrt{3} + 1)y = (\sqrt{3} - 1)x$ 做鏡射，恰好等於 P 點對 $y = mx$ 做鏡射，則 m 值為何？

8. 右圖是半徑為 50 的圓，用三種方法說明 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 的最大值 (寫出一種 3 分，二種 6 分，三種 10 分)



9. 設 a, b, c 為正實數，證明 $\frac{4a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{7}{2}$

10. 方程式 $\Gamma: x^2 + 4xy + 8y^2 - 4 = 0$ 且 (h, k) 為 Γ 上的動點，則 $h^2 + k^2$ 的最小值為何？