2016 TRML 數學競賽 團體賽

俞克斌老師編寫

1. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1$，且對每個正整數 $k\geq 2$，$5(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)=(k+4)a_k$，則 $a_{12}=$______。【2016 TRML 團體賽】

答：1365

解：$\begin{cases}5(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)=(k+4)a_k\\5(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1})=(k+5)a_{k+1}\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{相減}}5a_{k+1}=(k+5)a_{k+1}-(k+4)a_k\Rightarrow\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{k+4}{k}$

故 $\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\times\dfrac{a_{11}}{a_{10}}\times\dfrac{a_{10}}{a_9}\times\cdots\times\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{15}{11}\times\dfrac{14}{10}\times\dfrac{13}{9}\times\cdots\times\dfrac{5}{1}\Rightarrow\dfrac{a_{12}}{a_1}=\dfrac{15\times14\times13\times12}{4\times3\times2\times1}=1365$

2. 若 $x>0$，則 $x^2+2x+\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^2}$ 的最小值爲______。【2016 TRML 團體賽】

答：$3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}\right)$

解：原式 $=\left(x^2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{x}\right)+\left(x+x+\dfrac{5}{x^2}\right)\geq3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{5}{x}\cdot\dfrac{5}{x}}+3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\dfrac{5}{x^2}}=3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}\right)$

等號均成立於 $x^2=\dfrac{5}{x}=\dfrac{5}{x}$ 以及 $x=x=\dfrac{5}{x^2}\Rightarrow x^3=5\Rightarrow x=\sqrt[3]{5}$

3. 設 n 爲正整數且 $2^4+2^7+2^n$ 爲完全平方數，則 n 的最大值爲______。【2016 TRML 團體賽】

答：8

解：$2^4+2^7+2^n=2^4\left(1+8+2^{n-4}\right)=2^4\times x^2\Rightarrow2^{n-4}=x^2-9=(x+3)(x-3)$

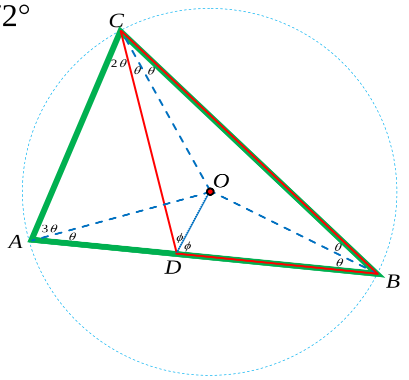
故 $\begin{cases}x+3=2^p\\x-3=2^q\end{cases}\Rightarrow6=2^p-2^q\Rightarrow2\times3=2^q\left(2^{p-q}-1\right)$，則 $\begin{cases}2^q=2\\2^{p-q}-1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=1\\p=3\end{cases}$

故 $2^{n-4}=2^p\times2^q\Rightarrow n-4=1+3\Rightarrow n=8$

4. 在 ΔABC 中，$\overline{CD}$ 是 $\angle ACB$ 的角平分線，D 在 $\overline{AB}$ 上。若 ΔABC 的外心與 ΔBCD 的內心重合，則 $\angle ACB=$______。【2016 TRML 團體賽】

答：$72°$

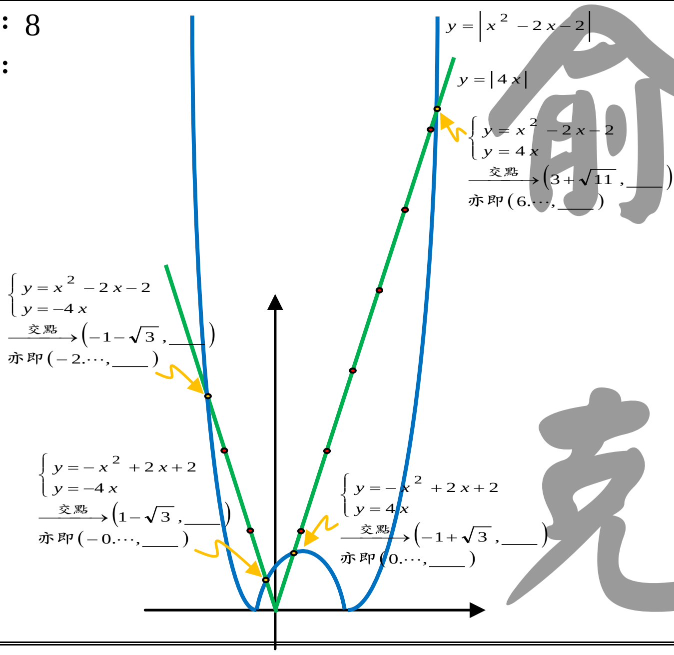
解：



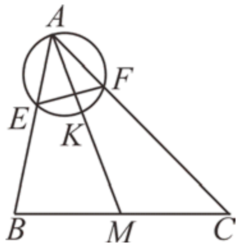
5. 不等式 $\left|x^2-2x-2\right| \le |4x|$ 共有________個整數解。 【2016 TRML 團體賽】

答：8

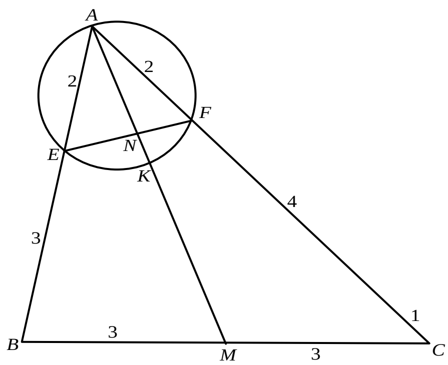
解：



6. 已知 ΔABC 中 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$。設 E、F 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 邊上的點，$\overline{AE}=\overline{AF}=2$。若 ΔAEF 的外接圓與 ΔABC 的中線 $\overline{AM}$ 交於點 K，則 $\overline{AK}=$________。 【2016 TRML 團體賽】



答：$\dfrac{6}{\sqrt{7}}$



解：由中線定理，得知 $\overline{AM}=2\sqrt{7}$

$\cos\angle BAC=\cos\angle EAF \Rightarrow \overline{EF}=\sqrt{\dfrac{128}{35}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$

$\cos\angle BAM=\dfrac{11}{5\sqrt{7}}$、$\sin\angle BAM=\dfrac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{7}}$

$\cos\angle AEF=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$、$\sin\angle AEF=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$

故 $\sin\angle ANE=\dfrac{9\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} \xrightarrow{正弦定律} \overline{AN}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$、$\overline{EN}=\sqrt{\dfrac{56}{45}}$ 且 $\overline{FN}=\sqrt{\dfrac{40}{63}}$

$\xrightarrow{內冪性質：\overline{AN}\times\overline{NK}=\overline{EN}\times\overline{FN}} \overline{NK}=\dfrac{4}{3\sqrt{7}}$ 故 $\overline{AK}=\overline{AN}+\overline{NK}=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$

7. 試問 $1!\times 2!\times\cdots\cdots\times 10!$ 的正因數中是完全平方數的共有________個。 【2016 TRML 團體賽】

答：2160

解：原數 $=10\times 9^2\times 8^3\times 7^4\times 6^5\times 5^6\times 4^7\times 3^8\times 2^9\times 1^{10}=2^{38}\times 3^{17}\times 5^7\times 7^4$

正因數中完全平方數有 $\underbrace{20}_{2^0,2^2,\ldots,2^{38}}\times\underbrace{9}_{3^0,3^2,\ldots,3^{16}}\times\underbrace{4}_{5^0,5^2,\ldots,5^6}\times\underbrace{3}_{7^0,7^2,7^4}=2160$ 個

8. 從區間$[0,1]$中任取兩數a、b，並令$c=a+b$。若A、B、C分別表示最接近a、b、c的整數，則$A+B=C$的機率爲________。（若$a=\dfrac{1}{2}$，則取$A=1$。同理b、c與a同）

【2016 TRML 團體賽】

答：$\dfrac{3}{4}$

解：當$0\le a<\dfrac{1}{2},0\le b<\dfrac{1}{2}\xrightarrow{A+B=C\Rightarrow 0+0=0}0\le a+b<1$取$0\le c=a+b<\dfrac{1}{2}$

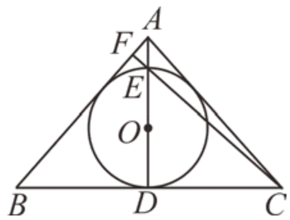
當$0\le a<\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\le b\le 1\xrightarrow{A+B=C\Rightarrow 0+1=1}\dfrac{1}{2}\le a+b<\dfrac{3}{2}$取$\dfrac{1}{2}\le c=a+b<\dfrac{3}{2}$

當$\dfrac{1}{2}\le a\le 1,0\le b<\dfrac{1}{2}\xrightarrow{A+B=C\Rightarrow 1+0=1}\dfrac{1}{2}\le a+b<\dfrac{3}{2}$取$\dfrac{1}{2}\le c=a+b<\dfrac{3}{2}$

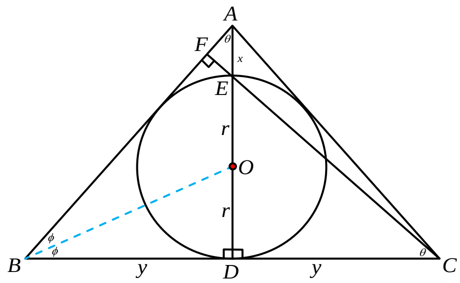
當$\dfrac{1}{2}\le a\le 1,\dfrac{1}{2}\le b\le 1\xrightarrow{A+B=C\Rightarrow 1+1=2}1\le a+b\le 2$取$\dfrac{3}{2}\le c=a+b\le 2$

所求幾何機率$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times 1+\dfrac{1}{4}\times 1+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

9. 已知等腰ΔABC中$\overline{AB}=\overline{AC}$，圓$O$爲$\Delta ABC$的內切圓，$\overline{AD}$爲邊$\overline{BC}$上的高，點$E$爲$\overline{AD}$與圓$O$在$\Delta ABC$內部的交點。延長$\overline{CE}$交邊$\overline{AB}$於點$F$，若$\overline{CF}$與$\overline{AB}$垂直，且圓$O$的半徑爲$r$，則$\dfrac{\overline{AD}}{r}=$________。【2016 TRML 團體賽】



答：$\dfrac{5}{2}$



解：$\tan\theta=\dfrac{y}{x+2r}=\dfrac{2r}{y}\Rightarrow y=\sqrt{2r(x+2r)}$

內角平分定理：$\overline{BA}=\dfrac{x+r}{r}\sqrt{2r(x+2r)}$

畢氏定理$\Rightarrow r=2x$，則$\dfrac{\overline{AD}}{r}=\dfrac{x+2r}{r}=\dfrac{5}{2}$

10. 已知在一圓周上自某一點開始，沿順時針方向分別依序填入268個整數，使得從任何一個填入的數開始，依順時針方向，每20個連續位置的數之和都是75。如果在第17個位置上填入整數3，在第83個位置上填入整數4，且在第144個位置上填入整數9，那麼第210個位置上的整數是________。【2016 TRML 團體賽】

答：-1

解：$g.c.d(268,20)=4$，表每四項一循環，

$\sum\limits_{k=i+1}^{i+20}a_k=5\sum\limits_{k=i+1}^{i+4}a_k=75\Rightarrow\sum\limits_{k=i+1}^{i+4}a_k=15$

又$a_{17}=a_{4k+1}=3$，$a_{83}=a_{4k+3}=4$，$a_{144}=a_{4k+4}=9$。故$a_{210}=a_{4k+2}=-1$