102 學年度台南區高級中學數學科能力競賽複賽試題（二）

1. 設實數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2+c^2=1$ 和 $a+b+c=\sqrt{3}$，試求 $a^3+b^4+c^5$ 之值。

2. 求滿足 $2012<\sum_{k=1}^{n} C_k^n<3000$ 之自然數 n。

3. 假設 n 是正整數，且使 $39.5^n+28.5^n$ 為一個正整數，試求 n 的值。

4. 假設 n 個正數 $a_1,a_2,\ \cdots,a_n$，滿足 $a_1+2a_2+\cdots+na_n=1$。

證明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}\geq\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5. 已知數列 $\{x_n\}$ 的首項 $x_1=1$，且滿足 $nx_nx_{n+1}=n^2+x_n^2$，其中 n 是自然數，試求 $[x_{2013}]$ 之值。(其中符號 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整数)

6. 求實數 a 的範圍使得下列不等式在 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恆成立

$$2^{50}\sin(\frac{\theta}{2^{49}})\left(\prod_{k=1}^{50}\cos(\frac{\theta}{2^{k-1}})\right)-(2a-1)\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}<3+2a$$

(其中符號 $\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2\cdots a_n$)

102 學年度台南區高級中學數學科能力競賽複賽試題（二）參考解答

1. 設實數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2+c^2=1$ 和 $a+b+c=\sqrt{3}$，試求 $a^3+b^4+c^5$ 之值。

解：$a^2+b^2+c^2=1$ ……………………………………………………………（1）

$a+b+c=\sqrt{3}$ ……………………………………………………………………（2）

（1）（2）$\Rightarrow 2=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow 1=ab+bc+ca$ …………………………………………………………（3）

（1）（3）$\Rightarrow 0=(a^2+b^2+c^2)-ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ ..（4）

$\because a,b,c$ 是實數 $(a-b)^2$ 、$(b-c)^2$ 、$(c-a)^2\geq 0$ ……………………………（5）

（4）（5）$\Rightarrow a=b=c$ …………………………………………………………（6）

（2）（6）$\Rightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow a^3+b^4+c^5==\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9\sqrt{3}}=\frac{3+4\sqrt{3}}{27}$

2. 求滿足 $2012<\sum_{k=1}^{n}C_k^n<3000$ 之自然數 n

Sol：$\sum_{k=0}^{n}C_k^n=2^n\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}C_k^n=2^n-1$ ……………………………………（1）

$2012<\sum_{k=1}^{n}C_k^n<3000$ ……………………………………………………（2）

（1）（2）$\Rightarrow 2013<2^n<3001\Rightarrow n=11$

3. 假設 n 是正整數, 且使 $39.5^n+28.5^n$ 為一個正整數. 求 n 的值.

證明： 因為 $39.5^n+28.5^n=\frac{1}{2^n}(79^n+57^n)$ 且當 n 是個偶時,

$79^n+57^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv 2 \mod 4$, 即 $79^n+57^n=4k+2$（k 是正整數), 因此當 n 是偶數時 $39.5^n+28.5^n=\frac{1}{2^{n-1}}(2k+1)$ 不是一個正整數.

而當 n 是奇數時, $79^n+57^n=(79+57)(79^{n-1}-79^{n-2}\times 57+...+57^{n-1})=2^3\times 17\times(2m+1)$,

故只有當 $n=1,3$ 時, $39.5^n+28.5^n$ 是正整數.

4. 假設n個正數a_1、a_2、、、a_n滿足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=1$

證明：$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\cdots+\frac{n}{a_n}\ge\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

證明：$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\cdots+\frac{n}{a_n}\right)\ (a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)$

$=\sum_{r,s=1}^{n}rs\left(\frac{a_s}{a_r}\right)$（根據算幾不等式）

$\ge 2\sum_{k=1}^{n}k\left[k+(k+1)+\cdots+n\right]-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=2\sum_{k=1}^{n}k\frac{\left[(n+k)(n-k+1)\right]}{2}-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\sum_{k=1}^{n}k(n+k)(n-k+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\sum_{k=1}^{n}kn(n+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=n(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5. 已知數列$\{x_n\}$的首項 $x_1=1$，且滿足 $nx_nx_{n+1}=n^2+x_n^2$，其中n是自然數，試求 $\left[x_{2013}\right]$ 之值。(其中$[x]$表示不超過x的最大整数)

解：首先我們可將$nx_nx_{n+1}=n^2+x_n^2$化成$x_{n+1}=\frac{x_n}{n}+\frac{n}{x_n}$，其中$n$是自然數

接著我們證明對任意大於或等於3的自然數n，恆有

$$\sqrt{n}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i) 由已知得$x_2=x_3=2$，

所以 $\sqrt{3}<x_3=2<\frac{3}{\sqrt{2}}$

故當$n=3$時不等式(*)成立。

(ii) 設當$n=k\ge 3$時不等式(*)成立，即$\sqrt{k}\le x_k\le\frac{k}{\sqrt{k-1}}$

令 $f(x)=\dfrac{x}{k}+\dfrac{k}{x}$，其中 $x\in(0,k)$

顯然 $\sqrt{k},x_k,\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}\in(0,k)$

易驗證 $f(x_k)=x_{k+1}$，$f\left(\sqrt{k}\right)=\dfrac{1+k}{\sqrt{k}}$，$f\left(\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}\right)=\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$

對任意實數 $a,b\in(0,k)$，

$$f(a)-f(b)=\left(\frac{a}{k}+\frac{k}{a}\right)-\left(\frac{b}{k}+\frac{k}{b}\right)=\frac{k^2+a^2}{ka}-\frac{k^2+b^2}{kb}=\frac{(a-b)(ab-k^2)}{kab},$$

由此可知 f 在區間 $(0,k)$ 上是單調遞減函數

故有

$$\sqrt{k+1}<\frac{k}{\sqrt{k-1}}=f\left(\frac{k}{\sqrt{k-1}}\right)\le f(x_k)=x_{k+1}\le f\left(\sqrt{k}\right)=\frac{k+1}{\sqrt{k}}$$

此即當 $n=k+1$ 時不等式(*)成立。

綜合以上，由數學歸納法知對任意大於或等於 3 的自然數 n，恆有

$$\sqrt{n}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

利用不等式(*)可得 $\sqrt{2013}\le x_{2013}\le\dfrac{2013}{\sqrt{2012}}$

$$\because \sqrt{2013}\approx 44.8665$$

$$\frac{2013}{\sqrt{2012}}\approx 44.8776$$

$$\therefore [x_{2013}]=44$$

6. 求實數 a 的範圍使得下列不等式在 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恆成立

$$2^{50}\sin\frac{\theta}{2^{49}}\prod_{k=1}^{50}\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}-(2a-1)\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}<3+2a$$

Solution:

根據二倍角公式 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 可證

$$\sin\theta=2^n\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k},\forall n\in\mathbb{N}$$

所以原不等式可改寫為

$$\sin 2\theta-(2\sqrt{2}a-\sqrt{2})\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}<3+2a \quad\text{.....................}(1)$$

令$x=\sin\theta+\cos\theta,\ \ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$

且$\sin 2\theta=x^2-1,\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

所以式(1) $\Leftrightarrow x^2-1-(2a-1)x-\frac{4}{x}-3-2a<0,\ x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow x^2-4-(2a-1)x-\frac{4}{x}-2a<0,\ x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x-\frac{4}{x}-2a\right)<0,\ x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$

$\because x+1>0\ \ \therefore x-\frac{4}{x}-2a<0\Leftrightarrow x-\frac{4}{x}<2a$

$\because f(x)=x-\frac{4}{x}$在區間$\left[1,\ \sqrt{2}\right]$為單調遞增函數

$\therefore \sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{2}}<2a\Leftrightarrow a>\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$