102 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）　　編號：______

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**填充題**，滿分爲二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設n是小於100的正整數，若$\sum_{i=1}^{3n} i$是9的倍數且是$6n$的倍數，則n有幾個解?
(4分)

二、設$x_1, x_2, \cdots, x_{2013}$是實數，求
(4分)

$$\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_{2012} \cos x_{2013} + \sin x_{2013} \cos x_1$$

的最大值。

三、試找出滿足$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3$的所有實數$x$。
(4分)

四、一袋中有4個紅球與3個白球，自袋中隨機取出4球，再任意分給甲、乙、丙三人；假設每人可得球數不限（包含0個），在已知甲拿到2個紅球的情況下，求乙至少拿到1個紅球的機率。
(4分)

五、ΔABC中，$\angle A=60°$，$\angle A$的角平分線交ΔABC的外接圓於一點D，$\overline{AD}=4$。若ΔABC的周長為$6+4\sqrt{3}$，求ΔABC的面積。
(5分)

102學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

$$\frac{3n(3n+1)}{2}=6nt \Leftrightarrow 3n+1=4t \Leftrightarrow n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$$

$$\frac{3n(3n+1)}{2}=9s \Leftrightarrow n(3n+1)=6s \Leftrightarrow 3\,|\,n$$

$\Rightarrow n=9,21,33,45,57,69,81,93$ 共8個解。（事實上，$n=9+12k, k=0,1,2,3,\cdots$）

二、【解】

$\because \sin x\cos y\le\frac{1}{2}\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)$ 且等號成立時，若且唯若 $\sin x=\cos y$

$\therefore$ 所求 $\le\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2 x_1+\cos^2 x_2\right)+\left(\sin^2 x_2+\cos^2 x_3\right)+\cdots+\left(\sin^2 x_{2013}+\cos^2 x_1\right)\right]=\frac{2013}{2}$

$\Rightarrow$ 所求最大值為 $\frac{2013}{2}$（取 $x_i=\frac{\pi}{4},\forall i$）

三、【解】

展開整理得:

$x^6+x^5+x^4-28x^3+x^2+x+1=0$. 顯然 $x\ne 0$，兩邊同除以 x^3 得

$\therefore x^3+x^2+x-28+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$ -------------- (1)

令 $z=x+\frac{1}{x}$，則 $z^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ 且 $z^3=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=x^3+3z+\frac{1}{x^3}$

$\therefore$ 式子(1)可改寫成

$z^3+z^2-2z-30=0\Rightarrow(z-3)\left(z^2+4z+10\right)=0\Rightarrow z=3$ 是唯一的實數根

$\because$ 若 x 為實數，則 z 必為實數 $\therefore$ 題目的實數解 x 必滿足

$x+\frac{1}{x}=3\Rightarrow x^2-3x+1=0\quad\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

四、【解】

樣本空間為甲拿到兩個紅球的所有可能組合。此時所取出的4球可能為：2紅2白、3紅1白及4紅，因此樣本空間的所有組合數為

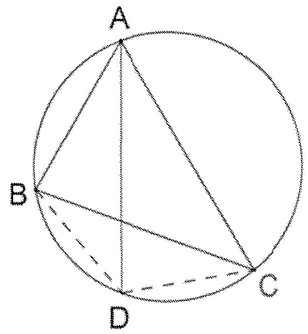
$C_2^4 \times C_2^3 \times C_2^2 \times 3^2 + C_3^4 \times C_1^3 \times C_2^3 \times 2 \times 3 + C_4^4 \times C_2^4 \times 2^2 = 402$

接著算甲拿到2個紅球且乙至少拿到1個紅球的組合數。此時，取出的4球可能為：3紅1白及4紅，而其所有可能的組合數為：

$C_3^4 \times C_1^3 \times C_2^3 \times 1 \times 3 + C_4^4 \times C_2^4 \times \left(C_1^2 \times C_1^1 + 1\right) = 126$

故所求機率為 $\dfrac{126}{402} = \dfrac{21}{67}$

五、【解】



連接 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ ，設 $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a$

$\angle ADC = 60° + \alpha, \angle ADB = 60° - \alpha,$ 其中 $0 \le \alpha < 60°$

由正弦定理，ΔABC 中，

$\dfrac{a}{\sin 60°} = \dfrac{b}{\sin(60° + \alpha)} = \dfrac{c}{\sin(60° - \alpha)} = 2R$ ，其中 R 為 ΔABC 外接圓半徑。

又 $\angle ABD = 30° + 60° + \alpha = 90° + \alpha$ ，而 ΔABD 與 ΔABC 有相同的外接圓，所以，

$$\frac{4}{\sin(90° + \alpha)} = 2R, \text{ 也就是說, } R = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

依題意 $a + b + c = 6 + 4\sqrt{3}$ 可得：

$$2R\sin 60° + 2R\sin(60° + \alpha) + 2R\sin(60° - \alpha) = 6 + 4\sqrt{3} ，$$

此即

$$\frac{4}{\cos\alpha}\sin 60° + \frac{4}{\cos\alpha}\sin(60° + \alpha) + \frac{4}{\cos\alpha}\sin(60° - \alpha) = 6 + 4\sqrt{3} 。$$

整理得

$$\frac{4\sin 60°(1 + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha} = 6 + 4\sqrt{3} ；$$

解得 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 。

所求ΔABC面積$=\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\cdot 2R\sin\left(60^\circ-\alpha\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}R^2\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\sin\left(60^\circ-\alpha\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{2}{\cos\alpha}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(2\cos^2\alpha-1+\frac{1}{2}\right)}{\cos^2\alpha}\ =\sqrt{3}$$