# 一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　筆試（二）　　編號：________________

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分，

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、是否存在三個正實數 $x$、$y$、$z$ 滿足 $x<|y-z|$，$y<|x-z|$，$z<|x-y|$。

二、設 $f(x)$ 為一個不為零的實函數。已知對任意實數 $a,b$ 滿足 $f(ab)=af(b)+bf(a)$ 且 $f(6)=6$，求 $f(6^{-6})$ 之值？

三、設 $a_1$，$a_2,\ldots\ldots,a_n$ 均為正實數，已知 $\sum_{i=1}^{n}a_i^4=1$，試證 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{1-a_i^3}\geq\frac{4\times 2^{2/3}}{3}$

四、求解函數 $f(x)$，滿足函數方程 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x$。

# 一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

## 南區（高雄區）　筆試（二）{參考解答}

一、是否存在三個正實數 $x$、$y$、$z$ 滿足 $x<|y-z|$，$y<|x-z|$，$z<|x-y|$。

【參考解答】若存在，則 $x$、$y$、$z$ 滿足 $x^2<(y-z)^2$，$y^2<(x-z)^2$，$z^2<(x-y)^2$。

亦即 $(x+y-z)(x-y+z)<0$，
$(x+y-z)(-x+y+z)<0$，
$(x-y+z)(-x+y+z)<0$。

三式相乘可得出 $(x+y-z)^2(x-y+z)^2(-x+y+z)^2<0$，不合。

二、設 $f(x)$ 為一個不為零的實函數。已知對任意實數 $a,b$ 滿足 $f(ab)=af(b)+bf(a)$ 且 $f(6)=6$，求 $f(6^{-6})$ 之值？

【參考解答】當 $ab\neq 0$

$$\frac{f(ab)}{ab}=\frac{f(b)}{b}+\frac{f(a)}{a}$$

令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，　$x\neq 0$。$h(ab)=h(a)+h(b)$

所以 $h(a^n)=nh(a)$，$n\in N$

故 $f(a^n)=a^n h(a^n)=a^n nh(a)=na^{n-1}f(a)$

$f(6^{-6})=6(\frac{1}{6})^5 f(\frac{1}{6})=-(\frac{1}{6})^5$

因為 $f(1)=2f(1)$，所以 $f(1)=0$

$0=f(1)=\frac{1}{6}f(6)+6f(\frac{1}{6})$，得 $f(\frac{1}{6})=-\frac{1}{6}$

三、設$a_1$，$a_2,\ldots\ldots,a_n$均為正實數，已知$\sum_{i=1}^{n}a_i^4=1$，試證$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{1-a_i^3}\geq\frac{4\times 2^{2/3}}{3}$。

【參考解答】

$$b-b^4=b(1-b^3)=\frac{\sqrt[3]{3b^3(1-b^3)^3}}{\sqrt[3]{3}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{(\frac{3b^3+3(1-b^3)}{4})^4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{(\frac{3}{4})^4}=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{1-a_i^3}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^4}{a_i-a_i^4}\geq\frac{4\times 2^{2/3}}{3}\sum_{i=1}^{4}a_i^4=\frac{4\times 2^{2/3}}{3}$$

四、求解函數$f(x)$，滿足函數方程$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x$。

【參考解答】：令$g(x)=\frac{x-1}{x+1}$，則 $g^{(2)}(x)=g(g(x))=-\frac{1}{x},g^{(3)}(x)=\frac{1+x}{1-x},g^{(4)}(x)=x$。

所以

$$\begin{cases}f(g(x))+f(g^{(2)}(x))+f(g^{(3)}(x))=x\cdots\cdots(1)\\f(g^{(2)}(x))+f(g^{(3)}(x))+f(x)=g(x)\cdots\cdots(2)\\f(g^{(3)}(x))+f(x)+f(g(x))=g^{(2)}(x)\cdots\cdots(3)\\f(x)+f(g(x))+f(g^{(2)}(x))=g^{(3)}(x)\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

(2)+(3)+(4) – (1)*2 得到

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{3}(g(x)+g^{(2)}(x)+g^{(3)}(x)-2x)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1+x}{1-x}-2x\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{(x-1)x(1-x)}{(x+1)x(1-x)}-\frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)x(1-x)}+\frac{(1+x)^2x}{(x+1)x(1-x)}-2x\right)\end{aligned}$$

化簡得$\boxed{f(x)=-\frac{2x^4+3x^2-1}{3x(x+1)(x-1)}}$