

102 學年度北一區（花蓮高中）

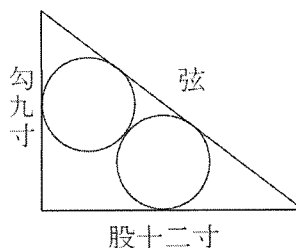
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
 2. 考試時間：1 小時。
 3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
 4. 將答案依序填寫在答案欄內。
1. 《天地明察》是有關和算家澀川春海的傳記故事，也納入澀川春海與同時代日本算聖關孝和的競爭，將數學知識活動，譬如解題與出題等對話，極為成功地融入故事情節之中。下圖是該小說裡一道數學題目的插圖：

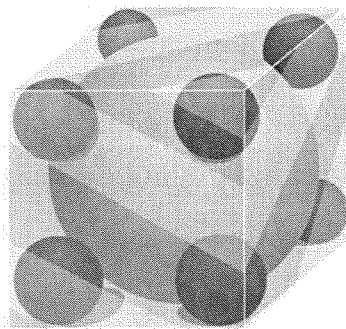


在一勾九寸、股十二寸的直角三角形內，有兩個直徑相同的圓，彼此相切，與邊也相切，如上圖所示。試求這兩個相同圓的半徑為（一）。

2. 設 $a = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $d = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $e = (-3)^3$ 則 a, b, c, d, e ，由大而小排列為（二）。

3. 某一燈塔裝置了紅、黃、藍、綠、紫五種不同顏色的燈，每晚會點亮其中一種燈，且每一晚都是從前一晚未點過的四種燈中隨機點亮一種。設第 1 晚點亮紅色燈，則第 6 晚也點亮紅色燈的機率為（三）（以最簡分數表示）。

4. 有一輛車在筆直的公路上做等速直線運動。開始時該車位於 A 點，1 分鐘及 2 分鐘後，該車分別位於 B 和 C 點，有一人在某個觀測點 O 測得 $\angle AOB = 90^\circ$ 及 $\angle BOC = 30^\circ$ ，設 $\angle OAC = \theta$ ，則 $\tan \theta$ 的值為 (四)。
5. 設集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$ 共 102 個數， B, C 為另 2 個集合，滿足 $B \cup C = A$ ，則這樣的 (B, C) 共有 (五) 組。
6. 一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑為 1 單位的黃球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小紅球。



試求：小紅球的最大半徑為 (六) 單位。

7. 設 a 為實數。若對於所有實數 x ， $\left| \frac{x^2 + ax + 3}{x^2 + x + 2} \right| < 2$ 恆成立，則 a 的範圍為 (七)。
8. 坐標平面上圓 C 通過點 $(0, 2)$ ，且 C 與兩直線 $\sqrt{3}x - y + 2 = 0, y + 1 = 0$ 皆相切，則圓 C 的方程式為 (八)。

102 學年度北一區（花蓮高中）
高級中學數理及資訊學科能力競賽
（數學科筆試二答案欄）

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答 案 欄

| （ 一 ） | （ 二 ） | （ 三 ） | （ 四 ） |
|----------------|---------------------|------------------|--|
| $\frac{15}{7}$ | $b > a > c > d > e$ | $\frac{51}{256}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| （ 五 ） | （ 六 ） | （ 七 ） | （ 八 ） |
| 3^{102} | $2 - \sqrt{3}$ | $0 < a < 4$ | $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4$ $(x + 3\sqrt{3})^2 + (y - 5)^2 = 36$ |