

102 學年度高屏區高級中學數學科能力競賽試題 (二)

注意事項：(1) 作答時間：1 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 21 分。每題配分標於題末。請將計算及證明題演算過程或理由，依序寫在答案卷上。

(3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 試證明： $8888^{2222} + 7777^{3333}$ 能被 37 整除。 (4 分)

2. 若 a 、 b 、 c 、 d 、 e 均為正整數，且 $a+b+c+d+e=a \times b \times c \times d \times e$ ，
試問 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ 的最大可能的值為何？ (4 分)

3. 在 $\triangle ABC$ 中，令 $\overline{BC}=a$ ， $\overline{CA}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ，且 a, b, c 成等差數列，試求 $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ 的值。
(5 分)

4. 已知 $\triangle ABC$ 的面積是 $\frac{1}{4}$ ，其外接圓半徑為 1，且 a 、 b 、 c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 。 (4 分)

5. 設 $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ ，試求滿足不等式 $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta < \sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta}$ 的 θ 之範圍。
(4 分)

試題 (二) 參考解答

1. 試證明： $8888^{2222} + 7777^{3333}$ 能被 37 整除。

【參考解答】 利用二項式定理證明，即

$$\begin{aligned}8888^{2222} + 7777^{3333} &= (8888^2)^{1111} + (7777^3)^{1111} \\&= (8888^2 + 7777^3) \left[(8888^2)^{1110} + (8888^2)^{1109} \cdot 7777^3 + \cdots + (7777^3)^{1110} \right] \\&\because 8888^2 + 7777^3 = (80 \cdot 3 \cdot 37 + 8)^2 + (70 \cdot 3 \cdot 37 + 7)^3 \\&= 37 \cdot M + 64 + 37 \cdot N + 343 = 37 \cdot K + 37 \cdot 11 \\&\therefore 8888^{2222} + 7777^{3333} \text{ 能被 37 整除。}\end{aligned}$$

2. 若 a, b, c, d, e 均為正整數，且 $a+b+c+d+e=a \times b \times c \times d \times e$ ，
試問 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ 的最大可能的值為何？

【參考解答】

設 $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ ，

$$5a \leq a \times b \times c \times d \times e \leq 5e \rightarrow a \times b \times c \times d \leq 5 \leq b \times c \times d \times e$$

$\rightarrow d \leq 5$ ，分 $d=1, 2, 3, 4, 5$ 討論；得

(a, b, c, d, e) 可能的解共有三組： $(1, 1, 2, 2, 2)$ 、 $(1, 1, 1, 3, 3)$ 、 $(1, 1, 1, 2, 5)$ 。

故 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ 的最大可能值是 $\boxed{32}$ 。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，令 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$ ，且 a, b, c 成等差數列，試求 $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ 的值。

【參考解答】

因為 $a+c=2b$ ，由正弦定理知 $\sin A + \sin C = 2\sin B$ 。因此，利用和差化積公式

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} &= 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A+C}{2} \\
\Rightarrow \sin \frac{A+C}{2} [\cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}] &= 0 \\
\Rightarrow \cos \frac{B}{2} [\cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}] &= 0, \because \cos \frac{B}{2} > 0, \\
\therefore \cos \frac{A-C}{2} &= 2 \sin \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{A+C}{2} \\
\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} &= 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
\therefore \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} &= 3 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4. 已知 $\triangle ABC$ 的面積是 $\frac{1}{4}$ ，其外接圓半徑為 1，且 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 的三邊

長，試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 。

【參考解法】 $\frac{1}{4} = \triangle ABC = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{4} \rightarrow abc = 1$ ，

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{c} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} = \sqrt{a} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{ca}} = \sqrt{b} \quad \dots (3)$$

(1) + (2) + (3) 得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ，

但上式等號成立 $\Leftrightarrow a=b=c$ ，則 $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \neq \frac{1}{4}$ (不合)

故 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 。

5. 設 $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ ，試求滿足不等式 $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta < \sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta}$ 的 θ 之範圍。

【參考解法】

case1. 當 $\sin \theta = 0$ ， $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 0 = 0 < \sqrt{1 + \sin 0} - \sqrt{1 - \sin 0} = 0$ (不合)

Case2. 當 $\sin \theta > 0$ ， $0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta < \sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta}$ ，兩邊平方後得

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \sin^2 \theta < 2 - 2\sqrt{\cos^2 \theta} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 \theta) < 3 - 3\sqrt{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow 0 < 2\cos^2 \theta - 3|\cos \theta| + 1 = (1 - |\cos \theta|)(1 - 2|\cos \theta|)$$

$$\Rightarrow 1 < |\cos \theta| \text{ (不合) 或 } |\cos \theta| < \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ < \theta < 120^\circ$$

Case3. 當 $\sin \theta < 0$ ，

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(-\sin \theta) > \sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta} > 0, \quad 1 - \sin \theta - 2\sqrt{1 - \sin^2 \theta} + 1 + \sin \theta < \frac{4}{3} \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow (|\cos \theta| - 1)(2|\cos \theta| - 1) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < |\cos \theta| < 1$$

$$\Rightarrow 180^\circ < \theta < 240^\circ \text{ 或 } 300^\circ < \theta < 360^\circ$$

由 case1,2,3 $\Rightarrow 60^\circ < \theta < 120^\circ$ 、 $180^\circ < \theta < 240^\circ$ 或 $300^\circ < \theta < 360^\circ$