教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（二）　　編號：________

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共六題**填充題**，滿分爲二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 P 為拋物線 $x^2=4y+4$ 之頂點，$\overline{AB}$ 為此拋物線上不過 P 的一弦，
(5 分)　當 $\angle APB=90°$，求 ΔAPB 之最小面積。

二、設 $x=0.1234,\ y=0.8766$，求
(4 分)

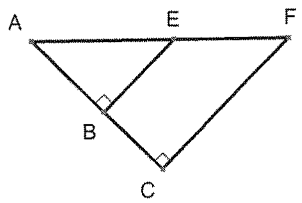
$$\left(\sum_{i=0}^{20} C_i^{20+i}\, x^{21}\, y^i+\sum_{j=0}^{20} C_j^{20+j}\, y^{21}\, x^j-2\right)^{2013}\text{。}$$

三、設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為實係數二次多項式且首項係數都是 1，已知 $f^2(x)$ 除
(3 分)　以 $g(x)$ 的餘式為 $4x-4$，而 $g^2(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $-4x-4$，求 $f(x)+g(x)$。

四、若 $3^{20}-2^{30}=a\cdot 10^n$，其中 $1<a<10$，且 n 為正整數，求 a 的整數部分。
(3 分)　$(\log 2 \doteq 0.3010,\ \log 3 \doteq 0.4771)$

五、設函數 f 滿足：對所有的實數 $x\neq 0$ 恆有 $2f(x)+5f(\frac{1}{x})=x$。
(3 分)　試求 $f(2)$。

六、如右圖所示，直角三角形 ACF 中
(3 分)　$\angle C=90°,\ \overline{CF}=3$，若 $\overline{BE}=\overline{EF}=2$，
且 $\angle ABE=90°$，求 $\overline{BF}$。

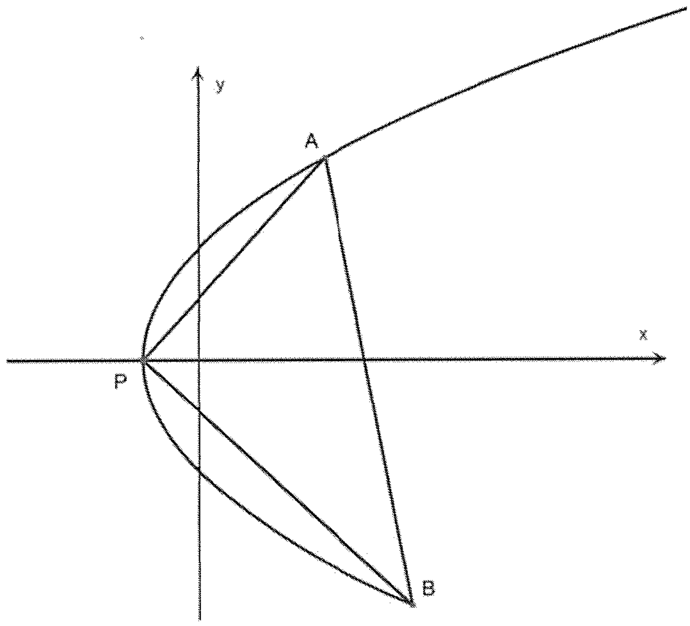


教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（二）【解答】

一、 5 分　16	四、 3 分　2
二、 4 分　-1	五、 3 分　$-\frac{1}{14}$
三、 3 分　$2x^2+2$	六、 3 分　$2\sqrt{3}$

一、【解】



設 $\overleftrightarrow{PA}: x = m(y+1)$

$\because \overline{PA} \perp \overline{PB},\ \therefore \overleftrightarrow{PB}: x = -\frac{1}{m}(y+1).$

由 $\begin{cases} x = m(y+1) \\ x^2 = 4(y+1) \end{cases} \Rightarrow m^2(y+1)^2 = 4(y+1) \Rightarrow y+1=0 \text{ or } y+1=\frac{4}{m^2}$

$\therefore A(\frac{4}{m},\ \frac{4}{m^2}-1)$

由 $\begin{cases} x = -\frac{1}{m}(y+1) \\ x^2 = 4(y+1) \end{cases} \Rightarrow x^2 = -4mx \Rightarrow x = 0 \ or \ x = -4m$

$\therefore B(-4m,\ 4m^2-1)$

故 ΔAPB 之面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4m^2-1 & -4m & 1 \\ \frac{4}{m^2}-1 & \frac{4}{m} & 1 \end{vmatrix}$ 的絕對值，即 $\frac{1}{2}\left|16m+\frac{16}{m}\right|=8\left|m+\frac{1}{m}\right|$

當 $m>0,\ \dfrac{m+\frac{1}{m}}{2}\ge\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}}\ \Rightarrow m+\frac{1}{m}\ge 2$

當 $m<0,\ \dfrac{(-m)+(-\frac{1}{m})}{2}\ge\sqrt{(-m)\cdot(-\frac{1}{m})}\ \Rightarrow m+\frac{1}{m}\le -2$

$\therefore \left|m+\frac{1}{m}\right|\ge 2\ \Rightarrow 8\left|m+\frac{1}{m}\right|\ge 16$

故 ΔAPB 面積之最小值為 16

二、【解】

丟銅板 $m+n$ 次，假設每次丟擲出現正面的機率為 x，出現反面的機率為 y，其中 $x+y=1.$ $\sum_{i=0}^{n-1}C_i^{m+i-1}x^m y^i$ 恰為在丟擲 $m+n$ 次銅板的過程中先出現 m 次正面的機率，$\sum_{j=0}^{m-1}C_j^{n+j-1}y^n x^j$ 恰為在丟擲 $m+n$ 次銅板的過程中先出現 n 次反面的機率，而這兩個事件彼此為補集，所以其和為 1，也就是

$$\sum_{i=0}^{n-1}C_i^{m+i-1}x^m y^i+\sum_{j=0}^{m-1}C_j^{n+j-1}y^n x^j=1.$$

所以 $\left(\sum_{i=0}^{n-1}C_i^{m+i-1}x^m y^i+\sum_{j=0}^{m-1}C_j^{n+j-1}y^n x^j-2\right)^{1001}=(1-2)^{1001}=-1.$

三、【解】

因為 f 和 g 皆為二次且首項係數都是 1，所以它們滿足以下：

$$f(x)=g(x)+ax+b\cdots(1)$$

由此可得

$$\begin{aligned} f^2(x)&=\left[g(x)+ax+b\right]^2 \\ &=g(x)\left[g(x)+2(ax+b)\right]+(ax+b)^2 \end{aligned}$$

又 $f^2(x)$ 除以 $g(x)$ 之餘式為 $4x-4,$ 因此

$$(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$
$$= a^2 g(x) + 4x - 4 \cdots\cdots(2)$$

($\because g(x)$的首項係數為 1)

另一方面，

$$g^2(x) = [f(x) - ax - b]^2$$
$$= f(x)[f(x) - 2(ax+b)] + (ax+b)^2$$

而$g(x)$除以$f(x)$的餘式為$-4x-4$,

即知

$$(ax+b)^2 = a^2 f(x) - 4x - 4 \cdots\cdots(3)$$

($\because f(x)$的首項係數為 1)

由(2)(3)可得

$$f(x) = g(x) + \frac{8}{a^2}x$$

再由(1)可得$b=0$, $\frac{8}{a^2}=a$, $a=2$.

代回(2), (3)得$f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x^2-x+1$

四、【解】

因為$\log 3^{20} = 20\log 3 = 20\cdot 0.4771 = 9.542$

又$\log 32 = 5\log 2 = 1.505$, $\log 40 = 1 + 2\log 2 = 1.602$

所以 $3^{20} = b\cdot 10^8$, 其中 $32 < b < 40$.

另一方面，

$\log 2^{30} = 30\log 2 = 9.030$
$\log 12 = 2\log 2 + \log 3 = 1.0791$

所以$2^{30} = c\cdot 10^8$, 其中 $10 < c < 12$

綜合以上，可知

$3^{20} - 2^{30} = d\cdot 10^8$, 其中 $d = b - c$, $20 < d < 30$

$= a\cdot 10^9$, 其中 $2 < a < 3$

故$n=9$, 而a的整數部分為 2.

五、【解】

$$\begin{cases} 2f(x)+5f(\frac{1}{x})=x \\ 2f(\frac{1}{x})+5f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

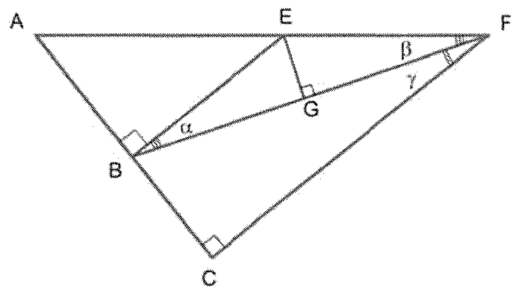
$$\begin{cases} 4f(x)+10f(\frac{1}{x})=2x \\ 25f(x)+10f(\frac{1}{x})=\frac{5}{x} \end{cases}$$

$$21f(x)=\frac{5}{x}-2x$$

$$f(x)=\frac{5-2x^2}{21x}$$

$$f(2)=\frac{5-8}{42}=-\frac{1}{14}$$

六、【解】



ΔBEF 為等腰三角形$\Rightarrow$ $\alpha=\beta$

$\overline{BE}\parallel\overline{CF}\Rightarrow\alpha=\gamma$

$\therefore\beta=\gamma$

過 E 點作 $\overline{BF}$ 的垂線，$\Delta EFG\cong BFC$

$\therefore\overline{EF}:\overline{GF}=\overline{BF}:\overline{CF}$；$\overline{BE}:\frac{\overline{BF}}{2}=\overline{BF}:\overline{CF}$

$\Rightarrow\overline{BF}^2=2\overline{BE}\cdot\overline{CF}=12$

$\overline{BF}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$