

102 學年度台灣省北三區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 _____ 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 _____ 分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

1. 若方程式 $x^2 - px - q = 0$ 的正根小於 3，其中 p, q 為正整數，則滿足上述條件的數對 (p, q) 共有幾組？
2. 平面上有 6 個圓，且每個圓的圓心皆在其它圓的外部。證明此 6 圓的交集為空集合。

102 學年度台灣省北三區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

【口試一】若方程式 $x^2 - px - q = 0$ 的正根小於 3，其中 p, q 為正整數，則滿足上述條件的數對 (p, q) 共有幾組？

【解】由於方程式有實根，所以判別式 $\Delta = p^2 + 4q > 0$ 。又 q 為正整數，所以 $-q < 0$ ，因而方程式的兩根為一正、一負。

設 $f(x) = x^2 - px - q$ ，則 $f(3) = 9 - 3p - q > 0$ ，從而有 $3p + q < 9$ 。由此可知 $p < 3$ 。當 $p = 1$ ， $0 < q \leq 5$ ；當 $p = 2$ ， $0 < q \leq 2$ 。故共有 7 組 (p, q) 滿足條件。□

【口試二】平面上有 6 個圓，且每個圓的圓心皆在其它圓的外部。證明此 6 圓的交集為空集合。

【證】設 P 為落在 6 個圓中的某一點。將 P 點與此 6 點分別以線段連接起來，則其中必有兩相鄰線段的夾角小於或等於 60° ，設為 $\angle O_1PO_2 \leq 60^\circ$ 。又 $\triangle O_1PO_2$ 中必有一內角大於或等於 60° ，因此該大角所對的大邊必大於或等於 $\overline{O_1O_2}$ 。因為 O_1 在圓 O_2 外部且 O_2 在圓 O_1 的外部，所以 P 點必於圓 O_1 外或在圓 O_2 外，矛盾！□