

102 學年度北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

問題：

1. 假設三個正實數 a, b, c 滿足 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$
試證： a, b, c 一定是某個三角形的三個邊長。
2. 設函數 f 對所有的正實數 m, n 均滿足 $f(mf(n)) = nf(m)$ ，求 $f(1)$ 的值。

102 學年度北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

【口試一】假設三個正實數 a, b, c 滿足 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$
試證： a, b, c 一定是某個三角形的三個邊長。

【解】 由假設

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) > 0$$

得到

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) > 0$$

由於 a, b, c 都是正實數，除了 $a+b+c$ 是正數外其它三項中至少有兩項為正數，所以得到上述四項皆為正數，即

$$a+b > c, a+c > b, b+c > a$$

故 a, b, c 必是某三角形的三個邊長。 □

【口試二】設函數 f 對所有的正實數 m, n 均滿足 $f(mf(n)) = nf(m)$ ，求 $f(1)$ 的值。

【證】 當 $m = n$ 時，我們有

$$f(xf(x)) = xf(x) \implies f(f(xf(x))) = f(xf(x)) = xf(x)$$

代入 $x = 1$ ，得到 $f(f(f(1))) = f(1)$ 。

現在令 $y = f(1)$ ，根據此式與題目條件則有

$$f(f(y)) = f(1 \cdot f(y)) = y \cdot f(1) = f(1) \cdot f(1)$$

因此得到

$$f(f(f(1))) = f(1)^2$$

比較

$$\begin{cases} f(f(f(1))) = f(1) \\ f(f(f(1))) = f(1)^2 \end{cases}$$

可知 $f(1)^2 = f(1)$ ，故 $f(1) = 1$ 或 $f(1) = 0$ 。 □