台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：____________(學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間為 15 分鐘，答辯完畢後繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需太專注於計算的精確度。

【問題一】設 ΔABC 的內切圓半徑為 r，三邊長為 a,b,c，其中 $a=\overline{BC}$。

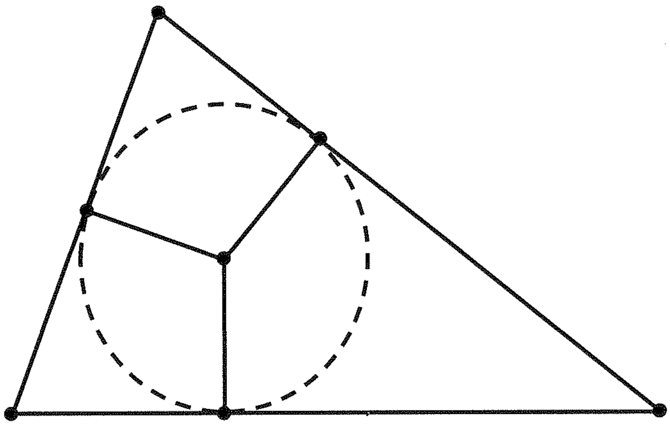
試證：$\angle A$ 為銳角的充要條件為 $b+c-a>2r$。

【問題二】試求所有滿足 $x^2+y^2=5$ 的正有理數 (x,y) 的解。

台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試題參考解答

【問題一】設ΔABC的內切圓半徑為r，三邊長為a,b,c，其中$a=\overline{BC}$。

試證：$\angle A$為銳角的充要條件為$b+c-a>2r$。



【參考解答】

連$\overline{AI}$，則$\Delta AFI \cong \Delta AEI$。

$\therefore \overline{AF}=\overline{AE}$，$\angle FAI=\frac{1}{2}\angle A=\angle EAI$，$\angle AIF=\angle AIE=\frac{1}{2}\angle EIF$。

且$\overline{AF}+\overline{AE}=b+c-a$，即$\overline{AF}=\frac{1}{2}(b+c-a)$。

$\angle A$為銳角$\Leftrightarrow \angle FAI<45^\circ$而$\angle AIF<90^\circ-\angle FAI>45^\circ$。

故ΔAFI中，$\angle AFI>\angle FAI$

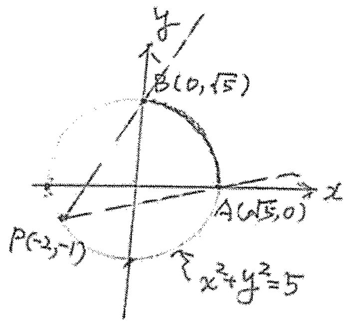
$\therefore \overline{AF}>\overline{IF}$

而$\overline{IF}=r$故得$\angle A$為銳角$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b+c-a)>r \Leftrightarrow b+c-a>2r$，即$2r<b+c-a$。

【問題二】試求所有滿足$x^2+y^2=5$的正有理數(x,y)的解。

【參考解答】

如圖，$P(-2,-1)$，$A(\sqrt{5},0)$，$B(0,\sqrt{5})$為圓$x^2+y^2=5$上三點。P為有理點，A,B則為非有理點。



$\overleftrightarrow{PA}$的斜率為$\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$即$\sqrt{5}-2\approx 0.23...$

$\overleftrightarrow{PB}$的斜率為$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.61...$

當$Q(x_1,y_1)$為圓弧AB上之正有理數對的點(如$(2,1),(1,2),...$)

$\overleftrightarrow{PQ}$的斜率$\dfrac{y_1+1}{x_1+2}$為介於$\sqrt{5}-2\approx 0.23...$與$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.61...$之間的正有理數。$Q$點可利用

過P點的直線其斜率為有理數m，$\sqrt{5}-2<m<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$來求得：

$y+1=m(x+2)$，即$y=m(x+2)-1$。

$$\text{解}\begin{cases} y=m(x+2)-1......(1) \\ x^2+y^2=5............(2) \end{cases}$$

解得$P(-2,-1)$及$Q(x_1,y_1)$其中$x_1=\dfrac{2(m+1-m^2)}{1+m^2}$，$y_1=\dfrac{m^2+4m-1}{1+m^2}$，

其中$\sqrt{5}-2<m<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$之有理數，故$x^2+y^2=5$正有理數對之解為

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(1+m-m^2)}{1+m^2} \\ y=\dfrac{m^2+4m-1}{1+m^2} \end{cases}\text{，其中}\sqrt{5}-2<m<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\text{且}m\text{為有理數}$$