102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試試題

一、設直角三角形ABC中，$\angle C=90^\circ$, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, D在$\overline{AB}$上且$\overline{CD}=h_c$為$\overline{AB}$邊上的高，r_a, r_b及r_c依序為三直角三角形BDC, ADC及ACB內切圓的半徑。

(1) 試說明 $r_a+r_b+r_c=h_c$ 的理由；

(2) 若三正實數p, q, r滿足$p^2+q^2=r^2$，試說明恰有一以$\angle C=90^\circ$的直角三角形ABC，使 $r_a=p$，$r_b=q$及 $r_c=r$.

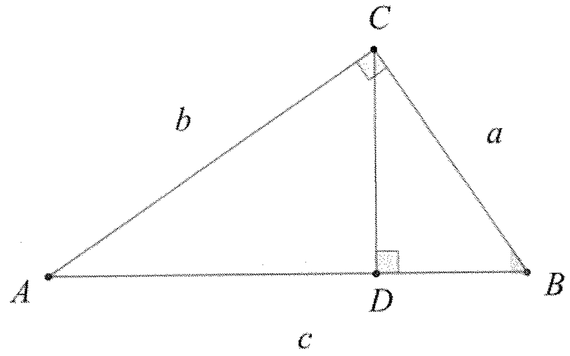
二、平面上有三個矩形 R_1, R_2, R_3，長寬都與座標軸平行。若此三個矩形可以完全覆蓋某個三角形 T 的三條邊，證明這三個矩形完全覆蓋了 T。

102學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試解答

一、【參考解答】

(1)　如圖，



因ΔABC，$\angle C = 90^\circ$，則由直角三角形母子相似性質知

$$\Delta ADC \sim \Delta ACB,\ \Delta BDC \sim \Delta BCA,$$

而其相似對應邊之比分別為$\dfrac{b}{c}$與$\dfrac{a}{c}$，故

$$r_a = \frac{a}{c} r_c,\ r_b = \frac{b}{c} r_c.$$

得 $r_a + r_b + r_c = \left(1 + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}\right) r_c = \dfrac{a+b+c}{c} \cdot r_c$.

再由 $c \cdot h_c = 2\Delta ABC = r_c \cdot (a+b+c)$ 得知 $\dfrac{a+b+c}{c} \cdot r_c = h_c$.

如上得到(1) $r_a + r_b + r_c = h_c$.

(2)　另設

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} r = p \\ \dfrac{b}{c} r = q \\ a + b - c = 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{2r^2}{p+q-r} \\ b = \dfrac{2qr}{p+q-r} \\ a = \dfrac{2pr}{p+q-r} \end{cases}$$

由p, q, r之條件知$p+q>r$, a, b, c均為正數且滿足$a^2+b^2=c^2$，其決定的直角三角形滿足三內切圓半徑 $r_a=p$，$r_b=q$及$r_c=r$.

二、【參考解答】

設P為三角形內部一點。過P點畫分別平行於兩座標軸的兩垂直線l, l', 交T於A, B, C, D四點。因為三矩形完全蓋住T的三邊，因此由鴿籠原理至少有一個矩形蓋住A, B, C, D中的兩個點。顯然這個矩形也蓋住了P。故得證。