102 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）

注意事項：

(1)時間分配：2 小時（16:00～18:00）。

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

一、已知 ΔABC 中，$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$. 過頂點 A, B, C 之三條高的長度依序為 h_a, h_b, h_c；而三內角平分線長依序為 t_a, t_b, t_c. 試證明：

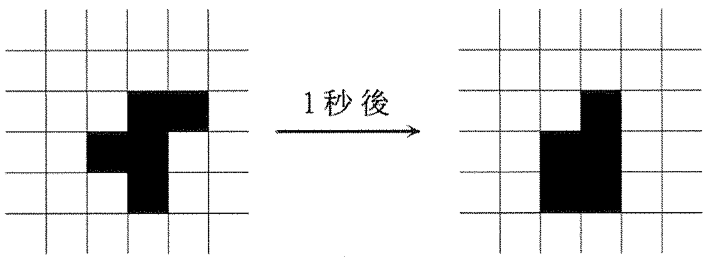
(1) 若 ΔABC 不是直角三角形，則 $a>b>c$ 之充要條件為

$$a^{2013}+h_a^{2013}>b^{2013}+h_b^{2013}>c^{2013}+h_c^{2013}.$$

(2) 若 ΔABC 為 $b=c$ 的等腰三角形，則 $a>b$ 之充要條件為

$$a^2+t_a^2>b^2+t_b^2.$$

二、在一個無限大的棋盤上，一開始時有 2013^{102} 個格子是黑色，其他格子是白色。每隔一秒，格子顏色會變化，其變化規則如下：對於一個格子 A 而言，考慮這三個格子：(i) 格子 A、(ii) 與 A 緊鄰的上方的格子、(iii) 與 A 緊鄰的右方的格子，若這三個格子中至少有兩個是黑色格子，則在下一秒格子 A 會是黑色；否則就會是白色。參考下圖的例子：



證明：不管開始時黑色格子如何分佈，在有限的時間內整個棋盤都只剩下白色的格子。

三、設 a_k 表示正整數 k 的最大奇因數，例如：$a_1=1, a_2=1, a_3=3, a_6=3$。試求使 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-2013\right|$ 之值為最小的正整數 n。

102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）【參考解答】

一、【參考解答】

(1):

(i) $h_a=\dfrac{2\Delta}{a}$, $h_b=\dfrac{2\Delta}{b}$, $h_c=\dfrac{2\Delta}{c}$, 其中Δ表三角形ABC之面積。

(ii) 再由$2\Delta=ab\sin C=bc\sin A$，得

$$h_a^{\,n}-h_b^{\,n}=\frac{(2\Delta)^n}{a^n}-\frac{(2\Delta)^n}{b^n}=\frac{(2\Delta)^n}{(ab)^n}\left(b^n-a^n\right)$$

$$=\left(b^n-a^n\right)\sin^n C$$

$$h_b^{\,n}-h_c^{\,n}=\left(c^n-b^n\right)\sin^n A.$$

(iii) 由已知條件知:

$0^\circ<\angle A,\ \angle C<180^\circ$且$\angle A,\ \angle C$都不等於$90^\circ$, 故

$0<\sin^n A,\ \sin^n C<1$；$0<1-\sin^n A,\ 1-\sin^n C<1.$

(iv) $a>b>c\Leftrightarrow a^n>b^n>c^n$

(v) $\left(a^n+h_a^{\,n}\right)-\left(b^n+h_b^{\,n}\right)=\left(a^n-b^n\right)\left(1-\sin^n C\right)$

$\left(b^n+h_b^{\,n}\right)-\left(c^n+h_c^{\,n}\right)=\left(b^n-c^n\right)\left(1-\sin^n A\right)$

(vi) 綜合 (ii)~(v) 得知

$$a>b>c\Leftrightarrow a^n+h_a^{\,n}>b^n+h_b^{\,n}>c^n+h_c^{\,n}$$

(2):

(法一)(利用相似三角形的概念之精巧解):(簡化計算)

(i) 由 $t_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$, $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ （$s=\dfrac{a+b+c}{2}$）

得 $t_a^{\,2}=bc\cdot\left(1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right)=b^2\left(1-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)$ （以$c=b$代入）

得 $t_b^{\,2}=ac\cdot\left(1-\dfrac{b^2}{(a+c)^2}\right)=ab\left(1-\dfrac{b^2}{(a+b)^2}\right)$

(ii) 可令$b=1$，得

$$a^2+t_a^{\,2}>1+t_1^{\,2}\Leftrightarrow a^2+\left(1-\frac{a^2}{4}\right)>1+a\left(1-\frac{1}{(a+1)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3a^2}{4}>1+a-\frac{a}{(a+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} > a - \frac{a}{(a+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3a}{4} > 1 - \frac{1}{(a+1)^2} \Leftrightarrow 3a > 4 - \frac{4}{(a+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3a + \frac{4}{(a+1)^2} > 4$$

等價於 $(a-1)(3a+5) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

(法二)(未利用相似概念，計算稍繁):

(i) 如(法一)。

(ii) $a^2 + t_a^{\ 2} > b^2 + t_b^{\ 2} \Leftrightarrow (a^2 - b^2) > t_b^{\ 2} - t_a^{\ 2}$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) > ab\left(1 - \frac{b^2}{(a+b)^2}\right) - b^2\left(1 - \frac{a^2}{4b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) > b(a-b) + \frac{a^2(a+b)^2 - 4ab^3}{4(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-b) > \frac{a\left(a^3 + 2a^2b + ab^2 - 4b^3\right)}{4(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b) > \frac{a^3 + 2a^2b + ab^2 - 4b^3}{4(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(a-b)(a+b)^2 > a^3 + 2a^2b + ab^2 - 4b^3$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 2a^2b > 5ab^2$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(3a+5b) > 0 \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a > b.$$

二、【參考解答】

我們可以證明更一般的結論:n格黑格至多經過n秒則全變白。用強數學歸納法，假設$k < n$時成立。

考慮把這n格黑格框住的的最小矩形R. 因為是最小矩形，因此R的最下面一列必有黑格，亦即R去掉此列後所得的矩形R_1內的黑格數$< n$. 同理，R的最左邊一行必有黑格，去掉此行後所得的矩形R_2內的黑格數$< n$.

注意到格子下一秒是黑色或白色與其左方或下方無關。故由數學歸納法假設，R_1, R_2至多經過$n-1$秒就全部變成白色了。此時如果R的最左下角的格子是白格，就已經證畢。如果是黑格，只要再經過一秒就變成白色。因此至多n秒全部格子都是白色。

三、【參考解答】

顯然，當 $k=2j-1$ 為奇數時，$a_k=k$，得知：$\frac{a_k}{k}=1$；當 $k=2j$ 為偶數時，$a_k=a_j$，得知：$\frac{a_k}{k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_j}{j}$。令 $S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$，則可得到遞迴式：

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\sum_{\substack{j=1\\k=2j-1}}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\frac{a_k}{k}+\sum_{\substack{j=1\\k=2j}}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{a_k}{k}=\sum_{j=1}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{a_j}{j}=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\frac{1}{2}S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)。$$

其中 $\lceil x\rceil$ 表示不小於 x 的最小整數，$\lfloor x\rfloor$ 表示不大於 x 的最大整數。因此，

$$S(n)\approx\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}S\left(\frac{n}{4}\right)\right)\approx\frac{n}{2}+\frac{n}{8}+\frac{n}{32}+\frac{n}{128}+\cdots=\frac{2n}{3}。$$

由此可估計出正整數 n 的約略值 $\frac{2n}{3}\approx 2013$，即 $n\approx 3019$。

先計算 $S(3019)$ 之值：

$$S(3019)=1510+\frac{1}{2}S(1509)=1510+\frac{1}{2}(755+\frac{1}{2}S(754))=1887\frac{1}{2}+\frac{1}{4}S(754)$$

$$=1887\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(377+\frac{1}{2}S(377))=1981\frac{3}{4}+\frac{1}{8}S(377)=1981\frac{3}{4}+\frac{1}{8}(189+\frac{1}{2}S(188))$$

$$=2005\frac{3}{8}+\frac{1}{16}S(188)=2005\frac{3}{8}+\frac{1}{16}(94+\frac{1}{2}S(94))=2011\frac{1}{4}+\frac{1}{32}S(94)$$

$$=2011\frac{1}{4}+\frac{1}{32}(47+\frac{1}{2}S(47))=2012\frac{23}{32}+\frac{1}{64}S(47)=2012\frac{23}{32}+\frac{1}{64}(24+\frac{1}{2}S(23))$$

$$=2013\frac{3}{32}+\frac{1}{128}(12+\frac{1}{2}S(11))=2013\frac{3}{16}+\frac{1}{256}(6+\frac{1}{2}S(5))=2013\frac{27}{128}+\frac{1}{512}S(5)$$

$$=2013\frac{27}{128}+\frac{1}{512}(3+\frac{1}{2}S(2))=2013\frac{27}{128}+\frac{1}{512}(3+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}))=2013\frac{447}{2048}。$$

因此，$S(3019)>2013$ 且 $\left|\sum_{k=1}^{3019}\frac{a_k}{k}-2013\right|$ 之值為 $\frac{447}{2048}$。另一方面，

$$S(3018)=S(3019)-1=2012\frac{447}{2048}<2013，$$

且 $\left|\sum_{k=1}^{3018}\frac{a_k}{k}-2013\right|$ 之值為 $\frac{1601}{2048}$。又數列 $\langle S(n)\rangle$ 為嚴格遞增，故使 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-2013\right|$ 之值為最小的正整數 $n=3019$。