102學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

（1） 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
（2） 時間分配：2 小時（10:10～12:10）。
（3） 配分：每題皆為 7 分。
（4） 不可使用計算器。

一、設 $0 \le r < 1$，$f(x)$ 為定義在實數上的實數值函數，且滿足下列

條件：對所有實數 $a, b,$

$$|f(a)-f(b)| \le r|a-b|.$$

給定實數 x_0，定義數列

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \cdots,\ x_{n+1} = f(x_n),\ \cdots$$

求證：對所有整數 $m \ge n \ge 0,\ |x_m - x_n| \le \dfrac{r^n}{1-r}|x_1 - x_0|$。

二、設正三角形 ABC 的邊長為1，G 為其重心，P, Q 分別在 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$

邊上，且 $\overline{PQ}$ 通過 G，試證明：$\dfrac{2}{3} \le \overline{PQ} \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

三、設實數數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{k+2} = \dfrac{a_{k+1}^2 + 2a_k a_{k+1} - a_k^2}{2a_k}$, $k \ge 1$。

試證明：

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n+a_{n+1}} < 1 - \frac{1}{2^n}.$$

102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）參考解答

一、【參考解答】

由 $f(x)$ 的條件得

$$|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \le r|x_1 - x_0|,$$
$$|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \le r|x_2 - x_1| \le r^2|x_1 - x_0|,$$
$$\vdots$$
$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le r|x_n - x_{n-1}| \le \cdots \le r^n|x_1 - x_0|.$$

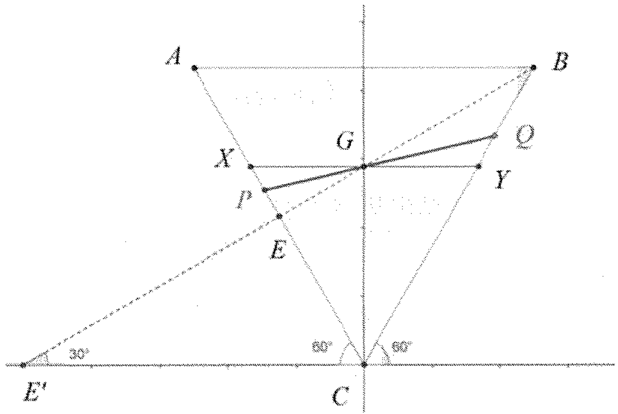
因此

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le r^{m-1}|x_1 - x_0| + r^{m-2}|x_1 - x_0| + \cdots + r^n|x_1 - x_0| \\ &= (r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + r^n)|x_1 - x_0| \\ &\le (r^n + r^{n+1} + \cdots)|x_1 - x_0| = \frac{r^n}{1-r}|x_1 - x_0|.\end{aligned}$$

證畢。

二、【參考解答】

如圖，建立直角坐標系(以 $\overline{AB}$ 的中垂線為 y 軸，過 C 點的水平線(平行 $\overline{AB}$)為 x 軸)。



X, Y 分別在 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 邊上且 $\overline{XY}$ 過 G 點平行 $\overline{AB}$. G：重心坐標為 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 連

$\overline{BG}$ 延長交 $\overline{AC}$ 於 E, 此時，$\overline{BE} \perp \overline{AC}$, 其延長線與 x 軸之夾角為 30°.

僅須再解說：當 P 在 $\overline{XE}$, Q 在 $\overline{BY}$ 且 $\overline{PQ}$ 過 G 點時，$\frac{2}{3} \le \overline{PQ} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

理由如下：

$\overleftrightarrow{BC}$： $y=\sqrt{3}x$，$\overleftrightarrow{AC}$： $y=-\sqrt{3}x$

$\overline{BE}$ 的斜率為 $\tan 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\overline{XY}$ 的斜率為 $\tan 0^{\circ}=0$.

$\overline{PQ}$ 的斜率 $0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

過 G 點且斜率 m 介於 0, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 之間的 $\overline{PQ}$ 直線方程式：

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}+mx,\quad 0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

依此求 Q 的坐標 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}+mx \end{cases}$ ：得

$$Q\left(\frac{\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{3}-m\right)}, \frac{1}{\sqrt{3}-m}\right).$$

同理，由 P： $\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}+mx \end{cases}$ 得

$$P\left(\frac{-\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{3}+m\right)}, \frac{1}{\sqrt{3}+m}\right).$$

因此 $\overline{PQ}^2=\frac{4\left(1+m^2\right)}{\left(3-m^2\right)^2}$，而此函數在 $0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ 為遞增函數。

得 $m=0$ 時，$\overline{PQ}^2=\frac{4}{9}$, $\overline{PQ}=\overline{XY}=\frac{2}{3}$ 為最小，而 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 時，$\overline{PQ}^2=\frac{3}{4}$, $\overline{PQ}=\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 為最大。綜合得知 $\frac{2}{3} \le \overline{PQ} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

三、【參考解答】

首先可注意到

$$\frac{1}{a_{k+1}-a_k}-\frac{1}{a_{k+1}+a_k}=\frac{1}{a_{k+2}-a_{k+1}}.$$

此即

$$\frac{1}{a_{k+1}+a_k}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}-\frac{1}{a_{k+2}-a_{k+1}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}+a_k}=1-\frac{1}{a_{n+2}-a_{n+1}}.$$

只要可證出 $a_{k+2}-a_{k+1}<2(a_{k+1}-a_k)$ 對所有正整數 k 均成立，本題的不等式就得證。我們利用數學歸納法證明 $a_k<a_{k+1}<3a_k$，對所有 $k=1, 2, 3, \cdots$ 均成立。這是因為：如果已知 $a_k<a_{k+1}<3a_k$，則

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k)}{2a_k}>0,$$

且

$$a_{k+2}-3a_{k+1}=\frac{a_{k+1}(a_{k+1}-3a_k)-a_ka_{k+1}-a_k^2}{2a_k}<0.$$

所以

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k)}{2a_k}<2(a_{k+1}-a_k).$$