

柒、獨立研究試題及參考解答

102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

- (4) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
- (5) 時間分配：2 小時（8:00~10:00）。
- (6) 配分：每題皆為 7 分。
- (7) 不可使用計算器。

一、令 $f(x)$ 為定義在非零實數上的實數值函數。找出所有滿足下列條件的

$f(x)$ ：對所有 $x \neq 0, y \neq 0$,

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

二、求 $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{153-x} = 2$ 的所有實數解 x 。

三、設 $f(x)$ 為整係數多項式，已知 $f(0), f(1)$ 均為奇數。

試證： $f(x) = 0$ 無整數根。

102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）參考解答

一、【參考解答】

將 $x=1$ 代入

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x) \quad \cdots \cdots (1)$$

得

$$f(y) + f(-y) = f(1).$$

令 $f(1)=a$ ，就有

$$f(-y) = a - f(y) \quad \cdots \cdots (2)$$

將 $y=-1$ 代入(1)式可得

$$x \cdot f(-x) + f(1) = x \cdot f(x).$$

利用(2)式可轉換為

$$x(a - f(x)) + a = x \cdot f(x).$$

$$\text{解得 } f(x) = \frac{a(x+1)}{2x} = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

最後，我們必須檢查：對所有的實數 c ，函數 $f(x) = c(1 + 1/x)$ 是

否為(1)式的解。代入得

$$\begin{aligned} x \cdot f(xy) + f(-y) &= x \cdot c \left(1 + \frac{1}{xy} \right) + c \left(1 + \frac{1}{-y} \right) = c \left(x + \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} \right) \\ &= c(x+1) = x \cdot c \left(1 + \frac{1}{x} \right) = x \cdot f(x). \end{aligned}$$

證畢。

二、【參考解答】

令 $\sqrt[5]{x-1}=1+y$, $\sqrt[5]{153-x}=1-y$, 則

$$(1+y)^5 + (1-y)^5 = (x-1) + (153-x) = 152$$

$$y^4 + 2y^2 - 15 = 0$$

$$y^2 = 3 \text{ 或 } -5 (\text{不合})$$

$$y = \pm\sqrt{3}.$$

將 $y = \pm\sqrt{3}$ 代入 $\sqrt[5]{x-1}=1+y$, 得

$$(x-1) = (1 \pm \sqrt{3})^5 = 76 \pm 44\sqrt{3},$$

$$x = 77 \pm 44\sqrt{3}.$$

三、【參考解答】

設 $f(x)=0$ 有一整數根 α , 且設

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

根據假設條件知道 $\alpha | a_n$, 亦即 $\alpha | f(0)$ 。又因為 $f(0)$ 為奇數, 則 α

亦為奇數。另一方面, $f(1)$ 為奇數, 則有

$$f(1) - f(\alpha) = f(1) - 0 = f(1)$$

因此, $f(1) - f(\alpha)$ 亦為奇數。但是, 我們知道

$$f(1) - f(\alpha)$$

$$= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n)$$

$$= -[a_0(\alpha^n - 1) + a_1(\alpha^{n-1} - 1) + \cdots + a_{n-1}(\alpha - 1)].$$

由此可知 $(\alpha-1) | f(1) - f(\alpha)$, 故 $\alpha-1$ 亦為奇數, 此與 α 為奇數矛盾,

故得證。