陸、筆試試題及參考解答

102 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時（13:30～15:30）。

(2) 配分：每題皆為 7 分。

(3) 不可使用計算器。

一、設ΔABC的外心為O、垂心為H，直線OH與$\overline{BC}$邊交於X。作過A且與直線OH平行的直線L，L與$\overline{BC}$邊交於R, R不同於C。令ΔARC的外心為O^*、垂心為H^*。證明：X在直線O^*H^*上。

二、設正整數 $n\geq 2$，如下圖所示，有$2n$個方格排成一列，今用k種顏色塗這些方格，規定相鄰的方格塗上不同的顏色，且第 1 格、第n格和第$2n$格的顏色互不相同，求符合規定的塗色方法總數。

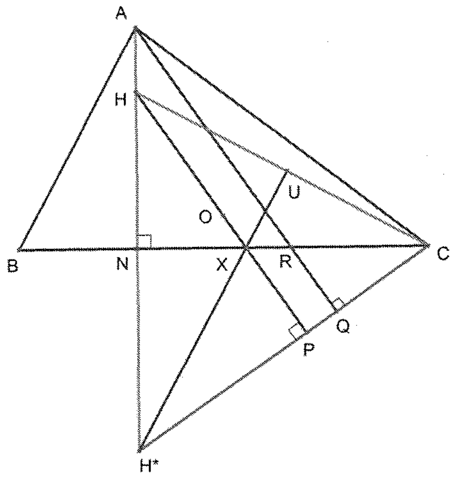
1		……		n		……		2n

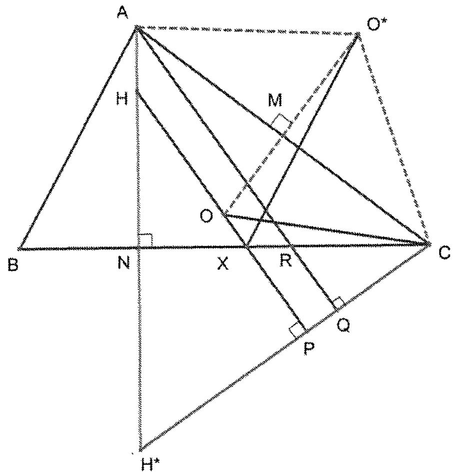
三、設a, b, c為正整數，如果$\sqrt{\dfrac{2013}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2013}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2013}{c+a}}$為整數，試求滿足這樣條件的所有$(a,b,c)$。

102 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【參考解答】





1. 如左上圖，自 A 至 RC（即 BC）的垂線為 AH，故 ΔARC 的垂心 H^* 在 AH 上。令 N 為 AHH^* 與 BC 的交點。HX 交 CH^* 於 P, H^*X 交 CH 於 U。
因 CN、HP 為 ΔCHH^* 的兩高，故 X 為其垂心，因此 $H^*XU \perp CH$。故 C, U, X, P 共圓，又 P, C, H, N 共圓，因此
$$\begin{aligned}\angle HXU &= \angle PCU = \angle BCH + \angle PCX \\ &= 90° - \angle B + \angle NHX = 90° - \angle B + \angle NAR\end{aligned}$$
。
2. 如右上圖，AC 的中垂線過 O 及 O^*，令 M 為 AC 的中點。
ARC（在 ΔARC 的外接圓上）所對圓周角為圓心角 $\angle AO^*C$ 的一半。故
$$\angle ARB = \frac{1}{2}\angle AO^*C = \angle CO^*M \text{。}$$
因 $AR \parallel HOX$，$\angle OXB = \angle ARB$，是以 $\angle OXB = \angle CO^*M$，得 C, X, O, O^* 共圓，且
$$\angle HXO^* = \angle OCO^* = \angle OCA + \angle O^*CA \text{。}$$
而
$$\angle OCA = 90° - \angle B \text{，} \angle O^*CA = 90° - \angle CO^*M = 90° - \angle ARB = \angle NAR \text{。}$$
故 $\angle HXO^* = 90° - \angle B + \angle NAR$。
3. 由 1. 及 2. 得 $\angle HXU = \angle HXO^*$。因此 O^*, H^*, X 共線。

二、【參考解答】

先計算一排m格相鄰異色且兩端異色的塗色方法總數，記為$f(m)$.

1		……		m

若只要求相鄰異色，則塗色方法數為$k(k-1)^{m-1}$.

此時塗色方法可分為兩類：

(i) 第 1 格和第m格異色，方法數即為$f(m)$.

(ii) 第 1 格和第m格同色，此時第 1 格和第$m-1$格必異色，故此類的塗色方法數為$f(m-1)$.

由上討論知：

$$f(m)+f(m-1)=k(k-1)^{m-1} \qquad (1)$$

現在利用(1)及$f(1)=0$來求$f(m)$, $m\ge 2$.

對於 $m\ge 2$,

$$\begin{aligned} f(m) &= \left[f(m)+f(m-1)\right]-\left[f(m-1)+f(m-2)\right] \\ &\qquad +\cdots+(-1)^{m-2}\left[f(2)+f(1)\right]+(-1)^{m-1}f(1) \\ &= \sum_{i=2}^{m}(-1)^{m-i}\left[f(i)+f(i-1)\right] \\ &= \sum_{i=2}^{m}(-1)^{m-i}k(k-1)^{i-1} \end{aligned}$$

所以

$$f(m)=(k-1)^{m}+(-1)^{m}(k-1) \qquad (2)$$

以上公式(2)對於 $m\ge 1$ 皆成立，若進一步要求第 1 格塗A顏色，第m格塗B顏色$(A\ne B)$，則塗色方法數為$\dfrac{f(m)}{k(k-1)}$

以下考慮原題的塗色方法數，因為要求第 1 格、第n格和第$2n$格的顏色互不相同，不妨設其分別塗顏色A, B和C，此時的塗色方法有

$$\frac{f(n)}{k(k-1)}\cdot\frac{f(n+1)}{k(k-1)},$$

但顏色A, B和C的選擇共有$k(k-1)(k-2)$, 所以本題的塗色方法總數為

$$\begin{aligned} & k(k-1)(k-2)\cdot\frac{f(n)}{k(k-1)}\cdot\frac{f(n+1)}{k(k-1)} \\ &= \frac{k-2}{k(k-1)}\left[(k-1)^{n}+(-1)^{n}(k-1)\right]\left[(k-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}(k-1)\right] \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{k}\left[(k-1)^{n-1}+(-1)^{n}\right]\left[(k-1)^{n}+(-1)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

三、【解】

$(a,b,c)=(2\times 2013,2\times 2013,14\times 2013),$

$(2\times 2013,14\times 2013,2\times 2013),$

$(14\times 2013,2\times 2013,2\times 2013).$

(1) 首先證明性質：

若 p,q,r 及 $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 都是有理數，則 $\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{r}$ 也都是有理數。

理由如下：令 $t=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$，則

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2=(t-\sqrt{r})^2$$

$$\Rightarrow p+q+2\sqrt{pq}=t^2-2t\sqrt{r}+r$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{pq}=t^2-p-q+r-2t\sqrt{r}$$

將上式兩邊平方後得

$$4pq=(t^2+r-p-q)^2+4t^2r-4t\sqrt{r}(t^2+r-p-q)\text{，}$$

令 $A=t^2+r-p-q$，明顯 $A>0$，則因 $4pq=A^2+4t^2r-4t\sqrt{r}A$ 為有理數，

故此 $\sqrt{r}$ 為有理數。

同理可證：$\sqrt{p},\sqrt{q}$ 為有理數。

(2)求所有可能 (a,b,c) 值：

因為 a,b,c 為整數，所以 $\frac{2013}{a+b},\frac{2013}{b+c},\frac{2013}{c+a}$ 為有理數，又

$\sqrt{\frac{2013}{a+b}}+\sqrt{\frac{2013}{b+c}}+\sqrt{\frac{2013}{c+a}}$ 為整數，由(1)知 $\sqrt{\frac{2013}{a+b}},\sqrt{\frac{2013}{b+c}},\sqrt{\frac{2013}{c+a}}$ 都是有理數。

令 $\sqrt{\frac{2013}{a+b}}=\frac{m}{n}$，其中 m,n 為互質的正整數，因為

$$\frac{2013}{a+b}=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow 2013n^2=m^2(a+b)\text{，}$$

所以 $m^2\mid 2013\Rightarrow m^2\mid 3\times 11\times 61\Rightarrow m=1\Rightarrow a+b=2013n^2$。

同理可得：$b+c=2013x^2,\quad c+a=2013y^2$，其中 x,y 為正整數。

因此 $\sqrt{\frac{2013}{a+b}}+\sqrt{\frac{2013}{b+c}}+\sqrt{\frac{2013}{c+a}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，由題意知此為整數，所以

$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le 3$。

(i) 如果 $\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$，則 $n=x=y=1$，因此

$$a+b=2013=b+c=c+a\Rightarrow 2(a+b+c)=6039\text{ （不合）}$$

(ii) 如果 $\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$，則 n,x,y 中必有一數為 1，另二數都是 2，因此

$2(a+b+c)=9\times 2013$（不合）。

(ii) 如果$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，由於對稱性，為不失去一般性，不妨假設

$n\ge x\ge y>1 \Rightarrow 3\ge y>1$。

如果$y=3$則

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{x}\Rightarrow 3=y\le x\le 3\Rightarrow x=3=n，$$

因此

$$a+b=3^2\times 2013,\ b+c=3^2\times 2013,\ \ c+a=3^2\times 2013$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)=27\times 2013 \text{（不合）}$$

如果$y=2$則

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\le\frac{2}{x}\Rightarrow 2=y\le x\le 4\Rightarrow x=2,3,4，$$

當$x=2$時，不合。

當$x=3$時，$n=6$，因此

$$a+b=6^2\times 2013,\ b+c=3^2\times 2013,\ c+a=2^2\times 2013$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)=49\times 2013 \text{（不合）}$$

當$x=4\Rightarrow n=4$時，因此

$$a+b=4^2\times 2013,\ b+c=4^2\times 2013,\ c+a=2^2\times 2013$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)=36\times 2013$$

$$\Rightarrow a=2\times 2013,\ b=14\times 2013,\ c=2\times 2013$$

因取消限制條件，故得

$$\begin{aligned}(a,b,c)=&(2\times 2013,2\times 2013,14\times 2013),\\&(2\times 2013,14\times 2013,2\times 2013),\\&(14\times 2013,2\times 2013,2\times 2013).\end{aligned}$$