臺中市立文華高級中等學校 106 學年度第 2 次教師甄選
數學科專業知能試題本(填充題公告部份)

測驗說明：
一、本測驗分成二大題：填充題及計算證明題。
二、填充題請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。
三、計算證明題：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

一、填充題(每題 4 分，共 84 分，全對才給分。)

1. 設四次多項式函數 $f(x)=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)+5x^2+10x+4$，當 $x=\alpha$ 時，$f(x)$ 有最小值 m，則數對 $(\alpha, m)=$ ______ 。

2. 設 α, β 為方程式 $\log_2 x+\log_x 8-6=0$ 之兩根，則 $\log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha=$ ______ 。

3. A、B 為兩正數，若 $A-B+\dfrac{15}{2}=0$，且 $\log A$ 之首數比 $\log B$ 之首數小 1，$\log A$ 之尾數比 $\log B$ 之尾數大 $\log 5$，則 $A+B=$ ______ 。

4. 設二次方程式 $(m^2+1)x^2-4mx+2=0$ 有兩正根 α 與 β，且 $2\alpha\beta=\alpha-3\beta$，則 $m=$ ______ 。

5. $(1+2x)^n$ 展開式中 x^3 的係數為 $a_n (n\geq 3)$，則 $\displaystyle\sum_{n=3}^{100}\frac{1}{a_n}=$ ______ 。

6. 如右圖，以紅、橙、黃、綠四色塗 $ABCD$ 四區，顏色可重複使用且相鄰兩區不同色，每區僅可塗一色或不塗色，但最多兩區不塗色，共有 ______ 種不同的塗色方法。

A	B
C	D

7. 福利社有四種罐裝飲料(每種數量都大於 20)，今欲買 20 罐飲料，且每種飲料至少買一罐，至多買六罐，則買法共有 ______ 種。

8. 從 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 中任取相異五數，已知所取五數的中位數為 6，則平均數亦為 6 的機率為 ______ 。

9. 若 a,b,c 為 $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & 2 \\ 2017 & 2x+2018 & 2019 \\ 2017^2 & 2018^2 & 3x+2019 \end{vmatrix}=0$ 之三根，則 $abc=$ ______ 。

10. 設 $0\le x\le\pi$ ，若 $y=3\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x$ ，則當 $x=a\pi$ 時， y 有最小值 m，則數對 $(a,m)=$ ______ 。

11. $\angle XOY=\theta$， $0^\circ<\theta<90^\circ$ 且 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ ，而 P 為 $\angle XOY$ 內部一點且 $\overline{OP}=10$。若在 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ 、$\overrightarrow{OY}$ 上分別取點 Q、R 使得 ΔPQR 之周長為最小，則 ΔPQR 周長之最小值為 ______ 。

12. 坐標平面上，圓 $C:(x-7)^2+(y+4)^2=5$，且 A 點坐標為 $(5,2)$。設 P 為 y 軸上的動點，Q 為圓 C 上的動點，則 $\overline{PA}+\overline{PQ}$ 的最小值為 ______ 。

13. 在同一平面上，有兩個三角形 ΔABC 和 ΔPQR ，若 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CA}$ ， $\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}+3\overrightarrow{QC}=2\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{RA}+2\overrightarrow{RB}+3\overrightarrow{RC}=3\overrightarrow{BC}$ ，則 $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta PQR\text{面積}}=$ ______ 。

14. 以 O 為原點之坐標平面，若 $\overrightarrow{OP}=(5\sin\alpha+\cos\beta,4\cos\beta+\sin\alpha)$ ，且 $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{3}$ ， $\dfrac{\pi}{2}\le\beta\le\dfrac{3\pi}{4}$ ，則有所 P 點所形成區域的面積為 ______ 。

15. 在單位圓上取六個等分點，從中任取三點 A、B、C，則 ΔABC 面積的期望值為 ______ 。

16. 若 $f(x)=x^4-2x^3+3x-\left(\int_2^x(3t^3-7t^2+5t-1)dt\right)-6$ ，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)}{4h}=$ ______ 。

17. 若 $\dfrac{4}{5}\le x\le 3$，求 $\sqrt{3-x}+\sqrt{5x-4}$ 之最大值 ______ 。

18. 若 $x=\sqrt{y^2-25}+\sqrt{z^2-25}$ ， $y=\sqrt{x^2-36}+\sqrt{z^2-36}$ ， $z=\sqrt{x^2-100}+\sqrt{y^2-100}$ ，則 $x+2y+4z=$ ______ 。

19. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\-5 & 1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$，且 $A^n=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則 $b=$ ______ 。

20. 設 $A(-5,2)$、$B(4,14)$，P 為動點，若 ΔABP 之周長為 54，則 ΔABP 面積之最大值為 ______ 平方單位。

21. 若 α,β 為方程式 $a^{2|x|}-8x^2+5|x|=1$ 異於零之兩根，$0<a<1$，且 $\alpha-2\beta=\dfrac{3}{4}$，則 a 之值為 ______ 。