106 年大學入學指定科目考試
數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（佔 24 分）

1. 從所有二位正整數中隨機選取一個數，設 p 是其十位數字小於個位數字的機率。關於 p 值的範圍， 試選出正確的選項。
   (1) $0.22 \le p < 0.33$　(2) $0.33 \le p < 0.44$　(3) $0.44 \le p < 0.55$
   (4) $0.55 \le p < 0.66$　(5) $0.66 \le p < 0.77$　【106 數甲】

答：(2) **（第二冊第三章機率—古典機率）**

解：$p = \dfrac{C_2^9}{90} = 0.4$

2. 設 $a = \sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍， 試選出正確的選項。
   (1) $25 \le a^5 < 30$　(2) $30 \le a^5 < 35$　(3) $35 \le a^5 < 40$
   (4) $40 \le a^5 < 45$　(5) $45 \le a^5 < 50$　【106 數甲】

答：(5) **（第一冊第三章指數對數—取對數、常用對數值）**

解：$a = 10^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a^5 = 10^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \log a^5 = \dfrac{5}{3} = 1.\overline{6}$，

又 $\log 45 \approx 1.6532$ 、 $\log 50 = 1.6990$，故 $45 \le a^5 < 50$

3. 試問在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$y = 3\sin x$ 的函數圖形與 $y = 2\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？
   (1) 2 個交點　(2) 3 個交點　(3) 4 個交點　(4) 5 個交點　(5) 6 個交點　【106 數甲】

答：(4) **（第五冊第二章三角函數—和角公式、函數圖形）**

解：$\begin{cases} y = 3\sin x \\ y = 2\sin 2x \end{cases} \Rightarrow 3\sin x = 4\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\left(4\cos x - 3\right) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ 或 $\cos x = \dfrac{3}{4}$

在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$\sin x = 0$ 有 3 解，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ 有 2 解

（$x = 0$ 或 π 或 2π 或 $\cos^{-1}\dfrac{3}{4}$ 或 $2\pi - \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$，共 5 解）

4. 已知一實係數三次多項式 $f\left(x\right)$ 在 $x = 1$ 有極大值 3，
   且圖形 $y = f\left(x\right)$ 在 $\left(4, f\left(4\right)\right)$ 之切線方程式爲 $y - f\left(4\right) + 5\left(x - 4\right) = 0$，
   試問 $\int_1^4 f''\left(x\right)dx$ 之值爲下列哪一選項？
   (1) -5　(2) -3　(3) 0　(4) 3　(5) 5　【106 數甲】

答：(1) **（第六冊第二章多項式的微分—切線、極值）**

解：$f\left(x\right)$ 在 $x = 1$ 處有極值，故 $f'\left(1\right) = 0$。又 $f\left(x\right)$ 在 $x = 4$ 處的切線斜率 $f'\left(4\right) = -5$。

所求 $= \left[f'\left(x\right) + C\right]_1^4 = f'\left(4\right) - f'\left(1\right) = \left(-5\right) - 0 = -5$

二、多選題（佔 40 分）

5. 設 $\vec{u}$ 爲 $\vec{v}$ 爲兩非零向量，夾角爲120°。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{u}+\vec{v}$ 垂直，試選出正確的選項。

(1) $\vec{u}$ 的長度是 $\vec{v}$ 的長度的 2 倍　　(2) $\vec{v}$ 與 $\vec{u}+\vec{v}$ 的夾角爲30°

(3) $\vec{u}$ 與 $\vec{u}-\vec{v}$ 的夾角爲銳角　　(4) $\vec{v}$ 與 $\vec{u}-\vec{v}$ 的夾角爲銳角

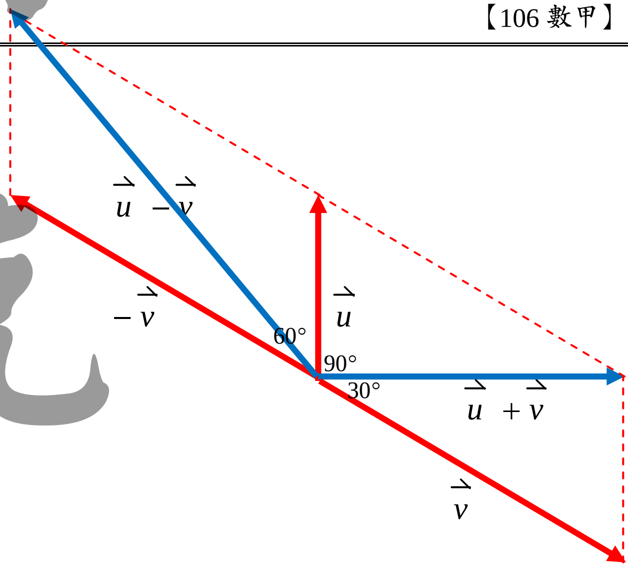
(5) $\vec{u}+\vec{v}$ 的長度大於 $\vec{u}-\vec{v}$ 的長度　　【106 數甲】

答：(2)(3)（第三冊第三章平面向量—內積）

解：$\vec{u}\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=0$

$\Rightarrow\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos120^\circ=0$

$\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=2\left|\vec{u}\right|=2t$，畫圖如右。



6. 已知複數 z 滿足 $z^n+z^{-n}+2=0$，其中 n 爲正整數。將 z 用極式表示爲 $r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，且 $r>0$。試選出正確的選項。

(1) $r=1$　(2) n 不能是偶數　(3)對給定的 n，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設

(4) θ 可能是 $\dfrac{3\pi}{7}$　(5) θ 可能是 $\dfrac{4\pi}{7}$　　【106 數甲】

答：(1)(4)（第五冊第二章複數極式—棣美弗定理）

解：(1) $z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$，$z^{-n}=r^{-n}\left(\cos n\theta-i\sin n\theta\right)$，$n\in N$

由 $z^n+z^{-n}+2=0$ 知：$r^n\sin n\theta=r^{-n}\sin n\theta\Rightarrow r=1$

(2) 故：$2\cos n\theta=-2\Rightarrow n\theta=\pi+2k\pi\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi+2k\pi}{n}$，$k\in Z$。顯然，$n$ 可爲偶數

(3) 對給定的 n，恰有 n 個不同的複數 z 滿足題設

(4) $\dfrac{1+2k}{n}=\dfrac{3}{7}\Rightarrow14k=3n-7\Rightarrow k=1,n=7$，可成立

(5) $\dfrac{1+2k}{n}=\dfrac{4}{7}\Rightarrow14k=4n-7\Rightarrow$ 不成立

7. 設實係數三次多項式 $f\left(x\right)$ 的首項係數爲正。已知 $y=f\left(x\right)$ 的圖形和直線 $y=g\left(x\right)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。

(1) $f\left(1\right)=g\left(1\right)$　(2) $f'\left(1\right)=g'\left(1\right)$　(3) $f''\left(1\right)=0$

(4)存在實數 $a\neq1$ 使得 $f'\left(a\right)=g'\left(a\right)$　(5)存在實數 $a\neq1$ 使得 $f''\left(a\right)=g''\left(a\right)$

【106 數甲】

答：(1)(2)(3)（第六冊第一章多項式的微分—切線）

解：依題意，$f\left(x\right)-g\left(x\right)=k\left(x-1\right)^3$，$k>0\Rightarrow f\left(1\right)-g\left(1\right)=0\Rightarrow f\left(1\right)=g\left(1\right)$

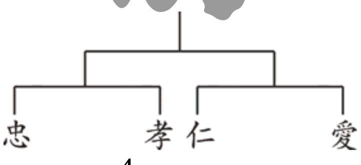
故 $f'\left(x\right)-g'\left(x\right)=3k\left(x-1\right)^2\Rightarrow f''\left(1\right)-g''\left(1\right)=0\Rightarrow f''\left(1\right)=g''\left(1\right)$

故 $f''(x)-g''(x)=6k(x-1)\Rightarrow f''(1)-g''(1)=0\Rightarrow f''(1)=g''(1)=0$

顯然，不存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$、$f''(a)=g''(a)$

三、選填題（佔 28 分）

A. 某高中一年級有忠、孝、仁、愛四班的籃球隊，擬由經抽籤決定的下列賽程進行單淘汰賽（輸一場即被淘汰）：



假設忠班勝過其他任何一班的機率爲 $\frac{4}{5}$，孝班勝過其他任何一班的機率爲 $\frac{1}{5}$，

仁、愛兩班的實力相當，勝負機率各爲 $\frac{1}{2}$。若任一場比賽皆須分出勝負，沒有和局。

如果冠軍隊可獲得 6000 元獎學金，亞軍隊可獲得 4000 元獎學金，

則孝班可獲得獎學金的期望值爲________元。【106 數甲】

答：880（第五冊第一章機率與統計—期望值）

解：$P(\text{孝班得冠軍})=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$、$P(\text{孝班得亞軍})=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$

期望值 $E(X)=6000\times\frac{1}{25}+4000\times\frac{4}{25}=880$

B. 坐標平面上有三條直線 L、L_1、L_2，其中 L 爲水平線，L_1、L_2 的斜率分別爲 $\frac{3}{4}$、$-\frac{4}{3}$。已知 L 被 L_1、L_2 所截出的線段長爲 30，

則 L、L_1、L_2 所決定的三角形的面積爲________。【106 數甲】

答：216（第三冊第二章直線—斜率）

解：$\frac{h}{x}=\frac{3}{4}$ 且 $\frac{h}{x-30}=-\frac{4}{3}\Rightarrow h=\frac{72}{5},=\frac{96}{5}\Rightarrow$ 三角形面積 $=30\times\frac{72}{5}\times\frac{1}{2}=216$

C. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均爲整數的點稱爲格子點。令 n 爲正整數，

T_n 爲平面上以直線 $y=\frac{-1}{2n}x+3$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），

而 a_n 爲 T_n 上的格子點數目，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$________。【106 數甲】

答：12（第六冊第一章極限概念—數列極限）

解：$\left.\begin{array}{l} x\text{截距 } 6n \\ y\text{截距 } 3 \end{array}\right\}\Rightarrow a_n=4+3\times 2n+2\times 2n+1\times 2n=12n+4$，所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n+4}{n}=12$

D. 坐標空間中，平面 $ax+by+cz=0$ 與平面 $x=0$、$x+\sqrt{3}y=0$ 的夾角(介於 0° 到 90° 之間)都是 60°，且 $a^2+b^2+c^2=12$，則 $(a^2,b^2,c^2)=$________。【106 數甲】

答：$(3,1,8)$（第四冊第二章空間中的平面—平面與平面夾角）

解：$\left|\frac{(a,b,c)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\Rightarrow a^2=3$，則 $b^2+c^2=9$

$$\left|\frac{(a,b,c)\cdot\left(1,\sqrt{3},0\right)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 2}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|a+\sqrt{3}b\right|=2\sqrt{3}\text{，故 } b=\pm1\Rightarrow b^2=1,c^2=8$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

1. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。
(1)試求 $\sin\left(\angle P_1OP_3\right)$。(4 分)
(2)試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。(4 分)
(3)假設 P_1 是圖形 $y=\frac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。(4 分)
【106 數甲】

答：(1) $\frac{24}{25}$ (2) $\frac{3a^2}{25}$ (3) 9 **（第四冊第三章矩陣─平面變換）**

解：$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow\cos\theta=\frac{4}{5},\sin\theta=\frac{3}{5}$

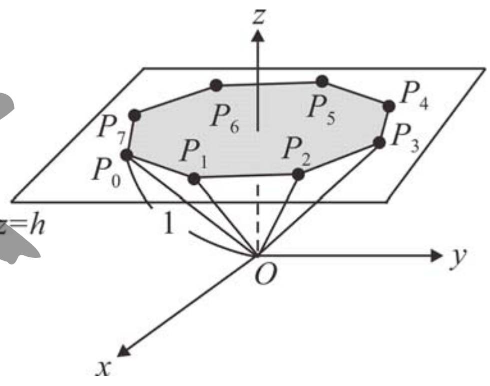
(1) $\sin\angle P_1OP_3=\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$

(2) $\Delta P_1P_2P_3=\Delta OP_1P_2+\Delta 0P_2P_3-\Delta OP_1P_3=\frac{1}{2}a^2\left(2\sin\theta-\sin2\theta\right)=\frac{3a^2}{25}$

(3) $a^2=\overline{OP_1}^2=x^2+\left(\frac{1}{10}x^2-10\right)^2=\frac{1}{100}x^4-x^2+100=\frac{1}{100}\left(x^2-50\right)^2+75$

當 $x=\pm5\sqrt{2}$ 時，a^2 有最小值 75，$\Delta P_1P_2P_3$ 面積有最小值 $\frac{3\times75}{25}=9$

2. 坐標空間中，$O(0,0,0)$ 爲原點。
平面 $z=h$（其中 $0\le h\le1$）上有一以 $(0,0,h)$ 爲圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取 8 點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段 $\overline{OP_j}$（$0\le j\le7$）的長度都是 1。
請參見示意圖。



(1)試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}$。(4 分)
(2)若 $V(h)$ 爲以 O 爲頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ 爲底的正八角錐體積，試將 $V(h)$ 表爲 h 的函數（註：角錐體積 $=\frac{1}{3}$ 底面積 $\times$ 高）。(2 分)
(3)在 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 $\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 90° 的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$ 的最大值爲何？(6 分)
【106 數甲】

答：(1) $2h^2-1$ (2) $V(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-h^3+h\right)$ (3) $\frac{1}{3}$

（第六冊第二章多項式的微分—極值）

解：令圓心 $H(0,0,h)$，則 $\angle P_iOH=\theta \xrightarrow{\overline{HP_i}=\sqrt{1-h^2}} \cos\theta=h,\sin\theta=\sqrt{1-h^2}$

(1) $\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=1\times1\times\cos2\theta=2h^2-1$

(2) $V(h)=\left[8\times\frac{1}{2}\times\left(1-h^2\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\times h\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-h^3+h\right)$

(3) $0\le\cos2\theta=2h^2-1<1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\le h<1$，$V'(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-3h^2+1\right)$

當 $h=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，$V(h)$ 有最大值 $\frac{1}{3}$