【數與式】

1. 算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　　　【例】若 $3a+2b=12$，求 ab^2 的最大值=$\underline{\dfrac{64}{3}}$

2. 乘法公式

(1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(2) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = \underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$x^4-1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$x^5-1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

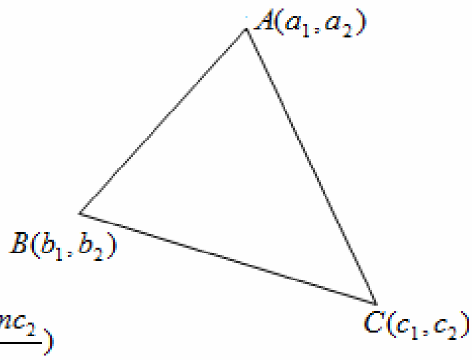
3. 基本公式：

(1) $\overline{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

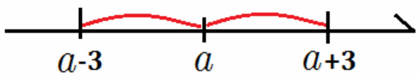
(2) ΔABC 重心 $G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}, \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

(3) $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{matrix}\right\|$

(4) 若 $\overline{AP}:\overline{PC}=m:n$，則 $P\left(\dfrac{na_1+mc_1}{m+n}, \dfrac{na_2+mc_2}{m+n}\right)$



4. 絕對值： $|x-a|<3 \Leftrightarrow \underline{(a-3)<x<(a+3)}$。



【多項式】

1. 直線方程式：

(1) 斜率 $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$　　　【例】若 $3x+2y-12=0$ 的斜率=$\underline{-\dfrac{3}{2}}$

(2)**點斜式**：過 $P(x_0, y_0)$，斜率為 m 之直線 L：$\underline{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$

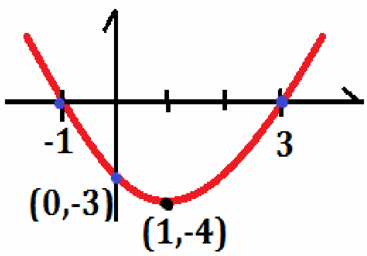
(3)**截距式**：x 軸截距 a，y 軸截距 b 之直線 L：$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$

(4)直線 $L: ax+by+c=0$，(1)若 $L_1 // L$，設 $\underline{L_1: ax+by+k=0}$　(2)若 $L_2 \perp L$，設 $\underline{L_2: bx-ay+k=0}$

2. 二次函數：　　　**例：** $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

(1)與 x 軸交點：$\underline{(-1,0), (3,0)}$

(2)與 y 軸交點：$\underline{(0,-3)}$



3. (1)餘式定理：$f(x)$除以$(x-c)$的餘式 $r=f(c)$

(2)因式定理：若 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $f(c)=0$

【例】$12^5-7\cdot12^4-58\cdot12^3+16\cdot12^2-465\cdot12+100=\underline{280}$

【例】$f(x)=x^{59}+7x^{22}-4x^8+5$ 除以 $x-1$ 的餘式= $\underline{\ 9\ }$

4. 牛頓定理：若**整係數** $x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$ 有四個相異正整數根，求此四根。 Ans:1,2,4,5

5. 根與係數：若 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根 α,β

則 $\begin{cases}兩根和：\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ 兩根積：\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

補 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根 α,β,γ

則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$

【例】若 α,β 是 $x^2+6x+2=0$ 的兩根，求 (1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$

Ans:(1)32 (2)–180 (3)$-6-2\sqrt{2}$

6. 勘根定理：說明 $x^3-9x-10=0$ 在 3, 4 之間有實根 【答】因為 $f(3)\cdot f(4)<0$

7. 不等式：(1) $x^2-4x+3\geq0$ 答：$x\geq3$，$x\leq1$ (2) $x(x-1)(x-3)(x-5)>0$ 答：$\underline{x<0},\underline{1<x<3},\underline{x>5}$

(大分、小連)

【指數、對數】

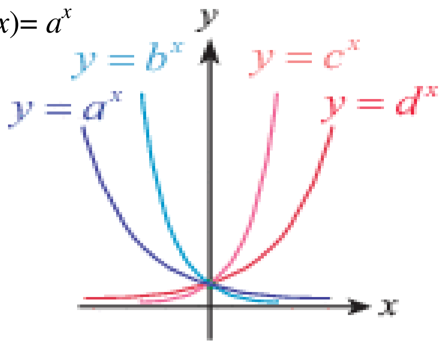
1. (1)負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (2)分數指數：設 $a>0$，則 $a^{\frac{1}{n}}=\underline{\sqrt[n]{a}}$

【例】設 $a>0$，$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$，求 $a+a^{-1}=\underline{\ 6\ }$

【例】$0\leq x\leq2$，求 $f(x)=-9^x+2\times3^{x+1}+3$ 的最大值與最小值。 Ans:最大值 12，最小值–24

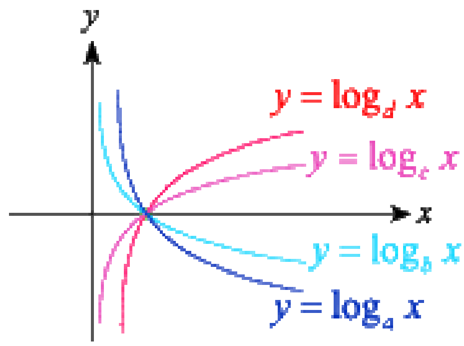
解：$f(x)=-[(3^x)-3]^2+12$

2. 圖型：(1)指數 $f(x)=a^x$



$c>d>1>a>b>0$

(2)對數 $f(x)=\log_a x$



3. (1) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

(2) $\log_a x-\log_a y=\log_a \dfrac{x}{y}$

(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

(4) $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$

(5) $a^{\log_a x}=x$

【例】求 $2\log\frac{5}{3}+2\log 3+\frac{1}{2}\log 49-\log\frac{7}{4}=$ __2__

【例】解 $\log x-6\log_x 10=1$ Ans: $x=1000$ *or* $\dfrac{1}{100}$

【例】某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則某甲需要__________年就可還清（$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.006=0.0026$）答案：13

【排列組合】

1. (1)階乘：$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$

(2)排列：$P^6_3=6\times5\times4$

(3)選取：$C^6_3=\dfrac{6\times5\times4}{3!}$

【例】甲、乙、丙、丁、戊，共五人排成一列，求下列方法數

(1)甲、乙、丙相鄰 (2)甲、乙不相鄰 (3)甲在乙前方，且乙在丙前方 Ans:(1)36 (2)72 (3)20

解：(1) $3!\cdot3!$ (2) $3!\cdot[4\cdot3]$ (3) $5\cdot4$ (丁戊選位就坐)

2. 重複組合：袋中有白、紅、藍球，取 5 個，共有 $\underline{H_5^{3種}=C_5^{5+3-1}}$ 種方法。

【統整題型】有 5 種不同的酒，倒入 3 個酒杯，求下列方法數：

(1)杯子不同，每種酒不限倒一次：5^3

(2)杯子不同，每種酒最多倒一次：P_3^5

(3)杯子相同，每種酒不限倒一次：H_3^5

(4)杯子相同，每種酒最多倒一次：C_3^5

(5)杯子不同，每種酒不限倒一次，且至少一杯為啤酒：5^3-4^3(沒啤酒)

Ans: (1)125 (2)60 (3)35 (4)10 (5)61

3. 二項式：$(a+b)^n=C_0^na^n+C_1^na^{n-1}b+C_2^na^{n-2}b^2+\cdots+C_{n-1}^nab^{n-1}+C_n^nb^n$

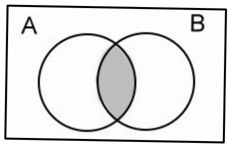
(1) $(x+1)^4=1\cdot x^4+4\cdot x^3+6\cdot x^2+4\cdot x+1$

(2) $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$ ※$C_0^n+C_2^n+C_4^n+\cdots=C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots=\dfrac{2^n}{2}$

【例】$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ 的展開式中，x^2 的係數為 $\underline{165}$

【機率統計】

1. 條件機率：在發生 A 事件下，B 發生的機率＝$P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$



2. 獨立事件：若 A ,B 事件獨立(彼此不相影響) $\Rightarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

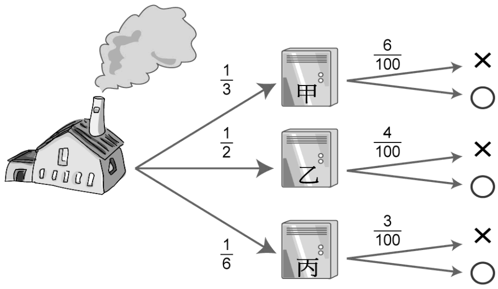
※若 A ,B 事件獨立 $\Rightarrow$ $P(B|A)=P(B)$

3. 貝式定理：【例】工廠有甲，乙，丙三機器，

產量占總產量的$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{6}$。已知產品中甲有 6%，

乙有 4%，丙有 3%為不良品。今任選一產品，已知

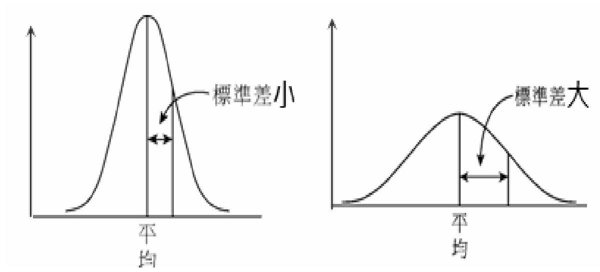
該產品為不良品，則此產品為甲機器所生產的機率為$\underline{\dfrac{4}{9}}$



4. (1)期望值(平均$\bar{x}$)：$E(x)=\dfrac{1}{n}\cdot[x_1+x_2+\cdots+x_n]=\underline{x_1\cdot p(x_1)}+\underline{x_2\cdot p(x_2)}+\underline{\cdots+x_n\cdot p(x_n)}$ [隨機]

(2)標準差 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n}}$

$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\cdot(x_i-\bar{x})^2}$ [隨機]



★性質：若 $y_i=ax_i+b$，則**(1)** $\bar{y}=a\bar{x}+b$ **(2)** $\sigma_y=|a|\cdot\sigma_x$

5. 二項分布 (n,p)：n 次獨立試驗中，恰 k 次成功的機率 $P(X=k)=C_k^nP^k\cdot(1-P)^{n-k}$

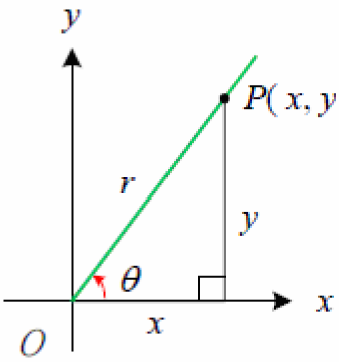
(1)期望值 $E(x)=np$

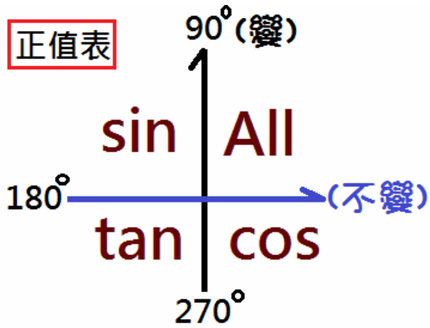
(2)變異數 $Var(X)=E(x^2)-[E(x)]^2=\underline{n\cdot p\cdot(1-p)}$ ※**標準差** $\sigma=\sqrt{Var(X)}$

【三角函數】

1.

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{對}{斜}=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{\csc\theta}\\[2ex]\cos\theta=\dfrac{鄰}{斜}=\dfrac{x}{r}=\dfrac{1}{\sec\theta}\\[2ex]\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{對}{鄰}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\cot\theta}\end{cases}$$





2. 平方關係：(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ **(2)** $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ **(3)** $\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

※ $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$

【例】若 $0°<\theta<90°$，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta+\cot\theta$ Ans: (1)$\dfrac{3}{8}$ (2)$\dfrac{8}{3}$

3. (1)正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

(2)餘弦定理： $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

(3)面積 Δ= $\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{abc}{4R}=rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【例】ΔABC 中，$a=4$，$b=6$，$c=8$，求 ΔABC 的 (1)面積 (2)高 h_c (3)內切圓 r (4)外接圓 R

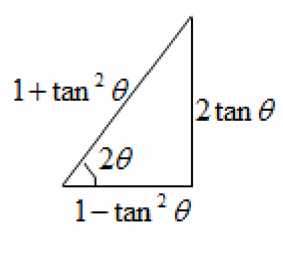
Ans:(1)$3\sqrt{15}$ (2)$\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$ (3)$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (4)$\dfrac{16}{15}\sqrt{15}$

4. 和角公式：(1) $\cos(A\pm B)=\cos A\cdot\cos B\mp\sin A\cdot\sin B$ (同名異號)

(2) $\sin(A\pm B)=\sin A\cdot\cos B\pm\cos A\cdot\sin B$ (異名同號)

(3) $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\cdot\tan B}$

倍角：(1) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$



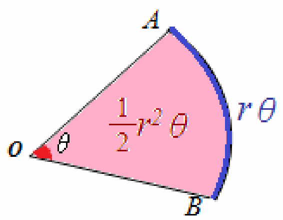
(2) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

(3) $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

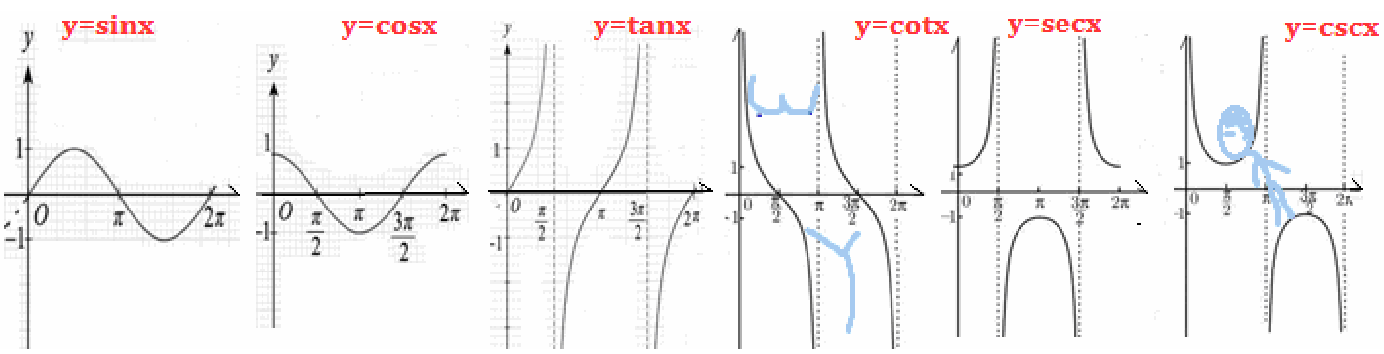
三倍角：(1) $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ (2) $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

5. (1) π(弧度)$=180°$ (2) 1(弧度)$\fallingdotseq57.3°$

6. 扇形 AOB 面積$=\dfrac{1}{2}r^2\theta$， **扇形周長**$=2r+r\theta$



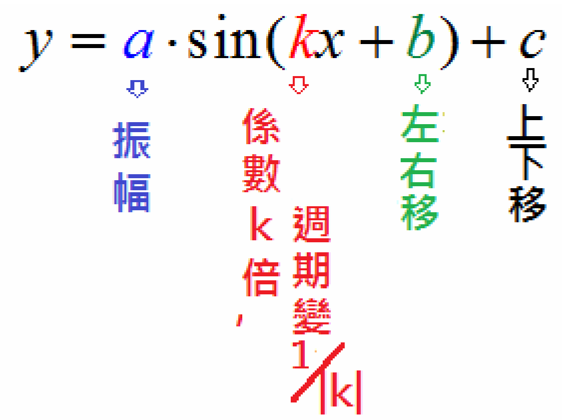
7.三角函數的圖形：波浪經過狹谷變成河川，河川上有個女人，難過擺著哭臉，女生一哭二鬧三上吊



8. **週期：**(1) $\begin{cases}\sin x\ ,\ \cos x \\ \csc x\ ,\ \sec x\end{cases} \xrightarrow{\text{週期}} 2\pi$ ；$\begin{cases}\tan x \\ \cot x\end{cases} \xrightarrow{\text{週期}} \pi$

(2) $|\sin x|, |\cos x|, |\tan x|, |\cot x|, |\sec x|, |\csc x| \xrightarrow{\text{週期}} \pi$

$\sin^2 x\ ,\cos^2 x\ ,\tan^2 x\ ,\cot^2 x\ ,\sec^2 x\ ,\csc^2 x \xrightarrow{\text{週期}} \pi$ (偶次方皆可)

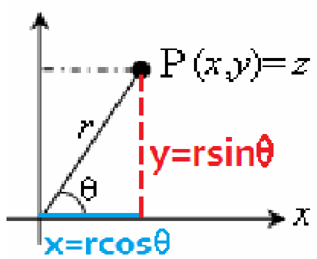
(3) 

9. **正餘弦疊合：**$-\sqrt{a^2+b^2}+c \ \le\ a\sin\theta+b\cos\theta+c \ \le\ \sqrt{a^2+b^2}+c$

(1) $Max=\sqrt{a^2+b^2}+c$，此時$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$ (2) $min=-\sqrt{a^2+b^2}+c$，此時$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\theta=\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

10. 複數 $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta$ 為 z 的輻角

※ z 與原點的距離：$|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}=r$



11. **複數極式的運算**：設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$， $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

(1) $z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$， $\Rightarrow\ z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$，其中 $z_2\neq 0$

【直線與圓】

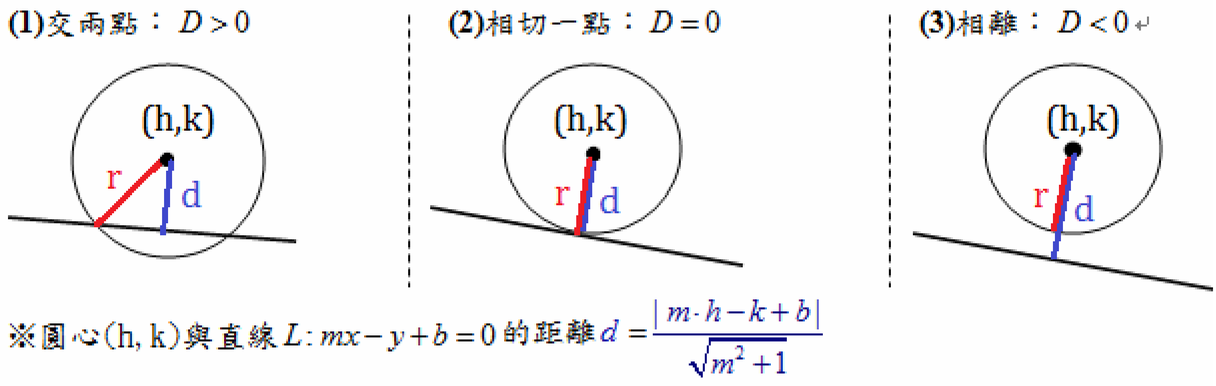
1. (1)點 $P(X_0,Y_0)$，直線 $L: ax+by+c=0$ $\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2)兩平行線$\begin{cases}L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ **距離** $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. 圓心 (h,k)，半徑為 r $\Rightarrow$ 圓的標準式：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

3. 圓與直線的關係：直線 L： $y=mx+b$ 代入圓 C： $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\Rightarrow$ 得二次式 $Ax^2+Bx+C=0$ ，判別式 $D=\sqrt{B^2-4AC}$

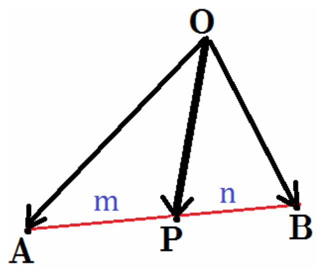


【平面向量】

1. 向量加減法：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (**後－前**)

2. 向量 $\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$ ，若 P,A,B 共線 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=1$

※若 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ ，則 $\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OB}$



3. 若 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$ ， $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ ，則內積 $\boldsymbol{\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

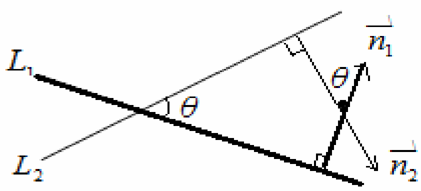
※(1) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=0$ **(2)** $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

4. 柯西： $(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)\geq(x_1x_2+y_1y_2)^2$

【例】設 $2x+y=10$ ，求 x^2+y^2 的最小值, 及此時 (x,y) 之值。 Ans:20 ,(4,2)

5. 法向量 $\overrightarrow{n}$ ：直線 $3x+4y-7=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n}=$ <u>(3,4)</u>

※直線 L_1 與 L_2 的夾角 $\theta=\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角 θ



6. 行列式: $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=ay-bx$ 【例】若 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=6$ ，求(1) $\begin{vmatrix} 4a-3b & 6b \\ 4c-3d & 6d \end{vmatrix}$= <u>144</u> (2) $\begin{vmatrix} 7a & 3b \\ 14c & 6d \end{vmatrix}$= <u>252</u>

※三階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\underline{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1}) - (\underline{c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3a_2b_1})$

$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ （依第一列展開）

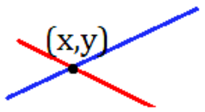
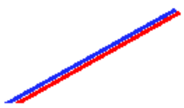
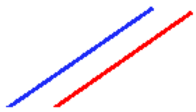
注意正負：

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

$= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ （依第二行展開）

7. 克拉瑪公式：

※聯立方程式(兩直線)：$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$，令 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$， $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$， $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

解	恰一解 $(x,y) = (\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta})$ （相容方程）	無限多解 （相依方程組）	無解 （矛盾方程組）
判別法	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$，$(\Delta \neq 0)$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$，$(\Delta = 0)$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$，$(\Delta = 0)$
圖形			

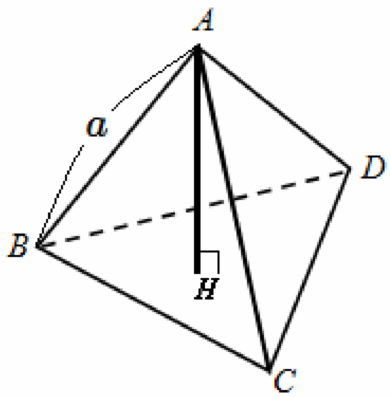
【空間向量】

1. 正四面體：(1)兩面夾角 $\cos\theta = \frac{1}{3}$

(2)高 $\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，$\left[r + R = \frac{1}{4}\overline{AH} + \frac{3}{4}\overline{AH} \right]$

(3)體積 $V = \frac{1}{3} \times$(底面積)$\times$(高$\overline{AH}$)

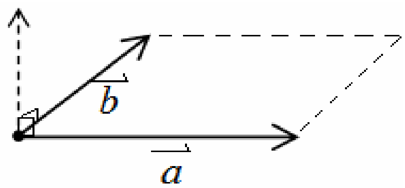
(4)兩稜線距離 $= \frac{\sqrt{2}}{2}a$



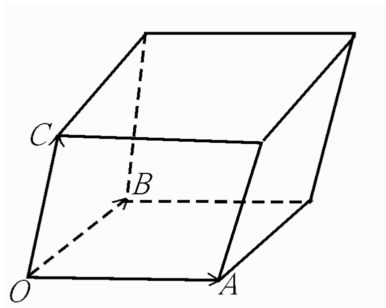
2. 設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\Rightarrow$ 外積 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & & a_3 & & a_1 & & a_2 & a_3 \\ & & \times & & \times & & \times & & \\ b_1 & b_2 & & b_3 & & b_1 & & b_2 & b_3 \end{array}$ …為**一向量**

(I)方向：$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$，且$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

(II)大小：$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張平行四邊形面積



3. 平行六面體：若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，



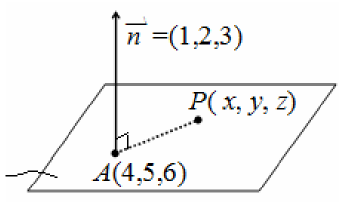
則(1) $V=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\bullet\overrightarrow{c}|=|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}|$

(2) $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}V$　　※ 若 O,A,B,C 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

【空間中的直線、平面】

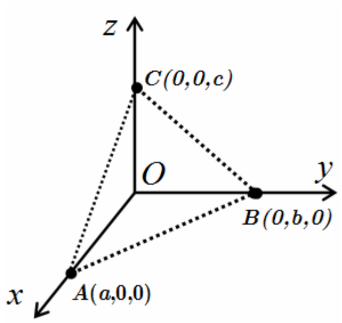
1. 空間中：**平面** $E: ax+by+cz+d=0$ **的法向量** $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$

【例】平面 $E: 1x+2y+3z-32=0$



2. 平面的截距式 E_{ABC}：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

※ 四面體體積 $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}|abc|$



3.平面中：(1)點 $P(X_0,Y_0)$，直線 $L: ax+by+c=0$　$\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2)兩平行線 $\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$ **距離** $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

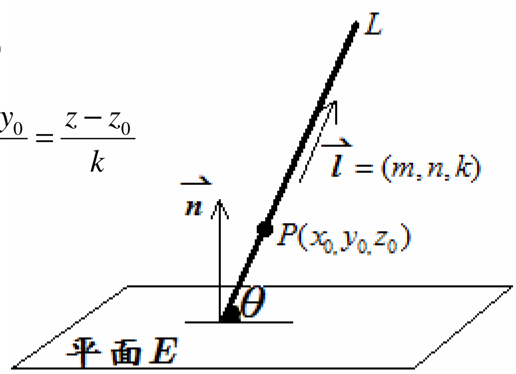
4.空間中：(1)點 $P(X_0,Y_0,Z_0)$，平面 E: $ax+by+cz+d=0$　$\Rightarrow$ **距離** $d(P,E)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c\cdot Z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(2)兩平行平面 $\begin{cases} E_1: ax+by+cz+d_1=0 \\ E_2: ax+by+cz+d_2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$ **距離** $d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

5. 空間中的直線：找(1)點 $P(x_0,y_0,z_0)$　**(2)方向向量** $\overrightarrow{l}=(m,n,k)$

$\Rightarrow$直線 L **參數式**: $\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \\ z=z_0+k\cdot t \end{cases}$　或 L **比例式**: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k}$

※<u>直線 L</u>與<u>平面 E</u>夾角 $\theta=$ **90°**$-$($\overrightarrow{l}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 夾角)



【矩陣】

1. 對角線矩陣$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

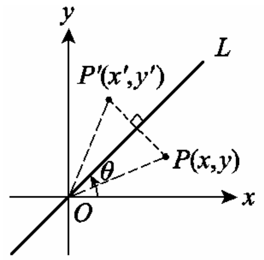
2. 若$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$有反矩陣$A^{-1}$，則$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ $\Rightarrow$**反矩陣**$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3. 若$M=\begin{bmatrix} A & X \\ B & Y \end{bmatrix}$為**轉移矩陣**，則(1)$0 \le A,B,X,Y \le 1$ (2)$\underline{A+B=1}$ 且 $\underline{X+Y=1}$

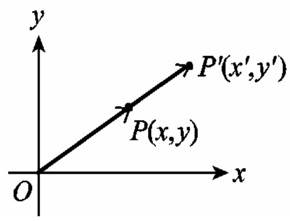
4. 線性變換：點$P(x,y)$，經$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$線性變換後得$P'(x',y')$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$

(1)旋轉：$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$以原點為中心，**逆時針**旋轉$\theta$

(2)鏡射：$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$對與 x 軸夾$\theta$的直線$L$鏡射



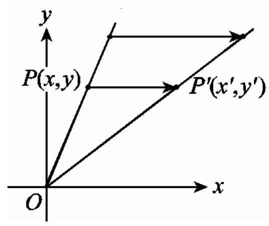
(3)伸縮：若$\overline{OP'}=\boldsymbol{k}\cdot\overline{OP}$，則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



(4)推移：

(1) $P(x,y) \xrightarrow{\text{沿 } x \text{ 軸，作 } ky \text{ 倍的推移}} P(x',y')=(x+ky\ ,\ y)$

則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$



(2) $P(x,y) \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸，作 } kx \text{ 倍的推移}} P(x',y')=(x\ ,\ y+kx)$

則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ kx+y \end{bmatrix}$

【數列與函數的極限】

1.等差數列：(1)$a_n=\underline{a_1+(n-1)\cdot d}=\underline{a_5+(n-5)\cdot d}$

(2)$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\underline{\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}=\underline{\dfrac{[2a_1+(n-1)d]\cdot n}{2}}$

(3)若a,b,c成等差，則等差中項$b=\underline{\dfrac{a+c}{2}}$。

2.等比數列：(1) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = a_5 \cdot r^{n-5}$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

(3)若 a,b,c 成等比，則等比中項 $\underline{b = \pm\sqrt{ac}}$ 。

3.無窮等比 (1)當 $-1 < r \le 1$ $\Rightarrow$ 數列 $\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot r^{n-1}$ 收斂

(2)當 $-1 < r < 1$ $\Rightarrow$ 級數收斂 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\text{首項}}{1 - \text{公比}}$

4. (1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \cdots$ 【例】 $\sum_{k=11}^{20} k^2 = \underline{2485}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \cdots$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 = \frac{1}{4}n^4 + \cdots$

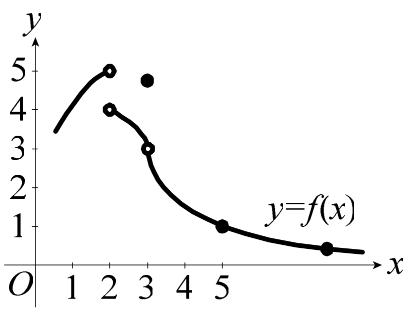
(4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = (\frac{1}{1}-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) \to 1$

【例】 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+2)} = \underline{\frac{175}{264}}$ 【例】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ = ________ 答案：$\frac{13}{6}$

5. (1)極限值存在： $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

(2)函數連續： $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

如圖：



(1) $x=2$ ： $\underline{\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5} \ne \underline{\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4}$ $\Rightarrow$ 極限值不存在

(2) $x=3$ ： $\underline{\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3} \ne \underline{f(3) = 5}$ $\Rightarrow$ 極限值存在，不連續

(2) $x=5$ ： $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5) = 1$ $\Rightarrow$ 極限值存在，連續

【例】已知 $\lim_{x\to 1} \frac{ax^2+x+b}{x-1} = 2$ ，則數對 $(a,b) =$ ________ 答案：$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

【微積分】

1. 導數 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 表切點 $(a,f(a))$ 的<u>**切線斜率**</u>

※(1)寫法：$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\,f(x)}{dx}=y'$

(2) $f(x)$ 在 $x=a$ 處：$\boxed{\text{可微分}}\ \begin{smallmatrix}\rightarrow\\ \not\leftarrow\end{smallmatrix}\ \boxed{\text{連續}}\ \begin{smallmatrix}\rightarrow\\ \not\leftarrow\end{smallmatrix}\ \boxed{\text{極限值存在}}$

2. 微分公式：

(1) $\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ (2) $\dfrac{d}{dx}(f\cdot g)=f'\cdot g+f\cdot g'$ (3) $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{f}{g})=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

(4) 若 $y=f(u)$ 且 $u=g(x)$，則 $\dfrac{d}{dx}[f(g(x))]=f'(g(x))\cdot g'(x)$

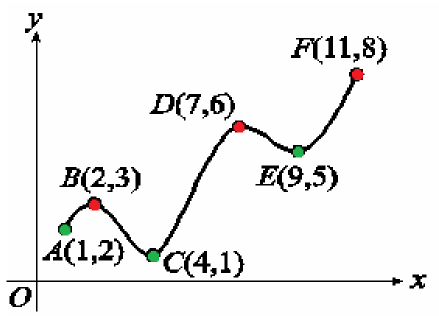
【例】$f(x)=(x^2-2)^3 \Rightarrow f'(x)=3\cdot(x^2-2)^2\cdot(2x)$

3. 函數的**極值**：極值發生在 <u>$f'(x)=0$</u> 或 <u>端點</u> 處

如圖：

(1)極大值：3，6，8 $\Rightarrow$ 最大值 8

(2)極小值：2，1，5 $\Rightarrow$ 最小值 1

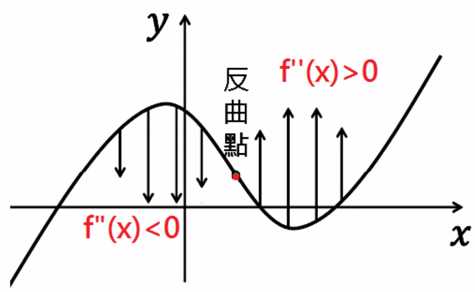


4. 函數的**凹凸性(二階導數)**：

(1)在 (a,b) 內 <u>$f''(x)>0$</u> $\Rightarrow$ 圖形凹**向上**

(2)在 (a,b) 內 <u>$f''(x)<0$</u> $\Rightarrow$ 圖形凹**向下**

※ **反曲點** $\Rightarrow$ $f''(x)=0$



[反敘述不一定成立。例如: $f(x)=x^4$，$f''(0)=0$，但(0,0)不是反曲點]

5. 積分的意義： $\int_a^b f(x)\cdot dx$ ＝曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸之間的區域的**面積**(有正負)

※微積分基本定理：$F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數，即 $F'(x)=f(x)$，則 <u>$\int_a^b f(x)\cdot dx=F(b)-F(a)$</u>

【例】求值：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)+\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)+\cdots+\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)\right)=\int_0^1(1+x^2)dx=x+\dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1=$ <u>$\dfrac{4}{3}$</u>

【例】求 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=$ <u>2π</u> (半圓面積)