

一、填充題（每題10分，共80分）

1. $a_n = |1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n+1}n|$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = ?$
2. 有一個 1×1 的矩陣 $[k]$ ，且 $[k] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{125} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，求 $\log_5 k = ?$
3. 有一個四角錐P-ABCD，底面四邊形ABCD為邊長 1 的正方形，且 $\overline{PA} = 1$ 、 $\overline{PB} = \overline{PD} = \sqrt{2}$ ，求四角錐P-ABCD的內切圓半徑。
4. a 為正數，三角形的三個邊長分別為 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{2a^2 - 4a + 4}$ 、 $\sqrt{2a^2 - 6a + 5}$ ，求三角形的面積為？（用 a 表示並化為最簡形式）
5. 用五種顏色為九宮格著色（不可旋轉），同一行的三個格子都不同色，同一列的相鄰兩格必須不同色，求總共有幾種塗色方法。
6. 若 A 為鏡射矩陣， B 為旋轉矩陣且 B 非單位矩陣，則 $AB = BA$ 的充要條件為？
7. 跟面積的極限有關的.....
8. 給定拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ ，另外，直線 L 通過 Γ 的焦點且 L 和 x 軸正向的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 。若直線 L 和 Γ 交於兩點 P 、 Q ，並且 P 、 Q 兩點對準線的垂足分別為 R 、 S ，求四邊形 $PQRS$ 的面積。

二、計算題（共70分）

1. 飛機一開始的座標 $(-19, -18, -15)$ ，方向 $(1, 2, 2)$ ，速率每分鐘6個單位。飛彈 A_1 一開始的座標 $(?, ?, ?)$ ，方向 $(3?, 2?, 6?)$ ，速率每分鐘7個單位。飛彈 A_2 一開始的座標 $(?, ?, ?)$ ，方向 $(3, 0, 4)$ ，速率每分鐘5個單位。若有一個飛彈擊中飛機，請問是哪一個飛彈？（有給學生的作法並且問學生的作法是否正確，若錯誤則需指出錯誤的地方並寫出正確的作法）（10分）
2. 多項式 $f(x)$ 對任意正實數 x 皆滿足 $f(x) = 4x^3 - \frac{33}{2}x^2 + 9x + \int_0^x f(t)dt$ ，則 $f(x)$ 為？

學生小綠的作法：令 $c = \int_0^x f(t)dt$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - \frac{33}{2}x^2 + 9x + \int_0^x f(t)dt \\ c &= x^4 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + cx \\ c(1-x) &= x^4 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \end{aligned}$$

小綠的作法只寫到一半，請問小綠的作法是否正確，如果正確就接著完成這題，如果錯誤就要指出錯誤的地方並寫出正確的作法（10分）

3. 圓上面有12個點，這些點連若干條弦，弦與弦相交形成三角形，則 (1) 與圓共用三個點的三角形有幾個 (2) 與圓共用兩個點的三角形有幾個 (3) 與圓共用一個點的三角形有幾個 (4) 與圓沒有共用點的三角形有幾個？
4. 若直線 L 和拋物線 $\Gamma_1: ?x^2 + ?x + ?$ 所圍成的區域面積為 A ，和拋物線 $\Gamma_2: ?x^2 + ?x + ?$ 所圍成的區域面積為 B ，若 $A = B$ ，則 (1) L 的直線方程式為何？ (2) A 為何？

5. 已知橢圓 Γ 的方程式為 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，另外四條直線 $x = \pm 2$ 、 $y = \pm 1$ 會圍成一個長方形區域。直線 $L: y = x + k$ 會和 Γ 交於 P 、 Q 兩點，且 L 和長方形交於 S 、 T 兩點，求 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{ST}}$ 的最大值為何？此時的 $k = ?$

參考答案

一、填充題：

1. $\frac{1}{2}$

2. 125

3. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

4. $\frac{3a+4}{2}$

5. 61440

6. $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

7.

8. $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

二、計算題：

1. 學生作法錯誤。飛彈 A_2 會在發射5分鐘後擊中飛機。

2.

3.

4.