

臺北市立復興高級中學 106 學年度第一次正式教師甄選

數學科教師甄選筆試題目卷

注意：本科試題共 2 頁。請確認試題內容、題號，並請考生注意時間掌握。

1 試求方程式 $2x-3+x\sqrt{x^2+1}+(x-3)\sqrt{x^2-6x+10}=0$ 之所有實數解。(10 分)

2 設 a, b, n 均為正實數，且滿足 $n=axb$ 。試證明： $a \leq \sqrt{n}$ 或 $b \leq \sqrt{n}$ 。(10 分)

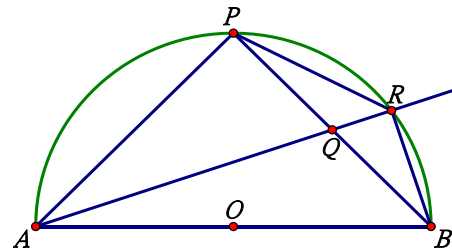
3 設 a, b, c 均為正實數，試證明： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3}$ 。(10 分)

4 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，試求 $\sum_{n=1}^{2017} [\log_2 n]$ 的值。(10 分)

5 某人投擲一枚公正的錢幣 8 次，他從數線上的 0 開始，若投擲的錢幣出現正面，則向數線的正向走 1 單位；若出現反面，則向數線的負向走 1 單位。試求他在移動的過程中曾經達到數線正向 4 的機率。(例如，他投擲錢幣出現「正反正正正正正」的情形就有經過正向 4) (10 分)

- 6 設 A, B 二箱中, A 箱內有兩球, 一黑一白; B 箱內有一白球。甲乙二人輪流取球, 每次先由甲自 A 箱內任取一球, 放入 B 箱內, 再由乙自 B 箱內任取一球, 放回 A 箱內, 這樣稱為「一局」。
- 試求當第三局結束時, A 箱內兩球為「一黑一白」的機率。(10 分)

- 7 如圖, O 為半圓的圓心, 直徑 $\overline{AB} = 4$, P 為弧 \widehat{AB} 的中點, Q 為 \overline{PB} 的中點, 延長 \overline{AQ} 交半圓於點 R, 試求四邊形 PABR 的面積。(10 分)



- 8 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle A$ 的角平分線交 $\triangle ABC$ 的外接圓於一點 D, $\overline{AD} = 6$ 。若 $\triangle ABC$ 的周長為 $9 + 6\sqrt{3}$, 試求 $\triangle ABC$ 的面積。(10 分)

- 9 數列 a_n 定義如下:
$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$
 , 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n(1 - a_n)$ 的值。(10 分)

- 10 數列 a_n 定義如下:
$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad (n \geq 0) \end{cases}$$
 。

試證明: 對所有自然數 n, $x, y = a_{n+1}, a_n$ 必為方程式 $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ 的解。(10 分)