

第 3 題

$\langle a_n \rangle$ 應是公差 d 不為 0 的等差數列

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 C_0^n (1-x)^n + a_1 C_1^n x(1-x)^{n-1} + a_2 C_2^n x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + a_n C_n^n x^n \\ &= a_0 C_0^n (1-x)^n + (a_0 + d) C_1^n x(1-x)^{n-1} + (a_0 + 2d) C_2^n x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + (a_0 + nd) C_n^n x^n \\ &= a_0 \left[C_0^n (1-x)^n + C_1^n x(1-x)^{n-1} + C_2^n x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + C_n^n x^n \right] + d \left[C_1^n x(1-x)^{n-1} + 2C_2^n x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + nC_n^n x^n \right] \\ &= a_0 \left[(1-x) + x \right]^n + ndx \left[C_0^{n-1} (1-x)^{n-1} + C_1^{n-1} x(1-x)^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} \right] \\ &= a_0 \left[(1-x) + x \right]^n + ndx \left[(1-x) + x \right]^{n-1} \\ &= a_0 + ndx \end{aligned}$$