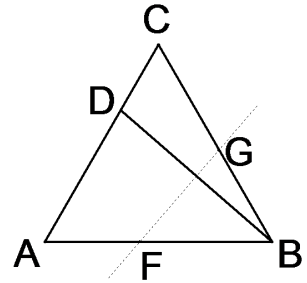


新北市立高級中等學校 106 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

一、填充題：72%，每題 6 分。

- 二元一次方程式 $54x + 21y = 906$ 的正整數解 (x, y) 共有 _____ 組。
- 已知有 5 名男生和 5 名女生一起參加某營隊，主辦單位欲將此 10 個人分成 3 組 (不區分組別)，這 3 組人數分別為 4、3、3，且每組須至少有一位女生，則分組的方法共有 _____ 種。(需算出最後答案才給分)
- 方程式 $x^6 + x^5 + x^4 - 28x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的所有實數解為 _____。
- 如圖， $\triangle ABC$ 為正三角形，點 D 為 \overline{AC} 上一點滿足 $\overline{AD} : \overline{DC} = 2 : 1$ 。沿某一虛線對摺使點 B 與點 D 重合，設該虛線分別與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 交於 F 、 G ，那麼 $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ 的值為 _____。



- 令 $a = \cos \frac{2\pi}{7}$ ， $b = \cos \frac{4\pi}{7}$ ， $c = \cos \frac{6\pi}{7}$ ，則 $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}$ 的值為 _____。
- 已知 $f(x)$ 是次數 (degree) 為 2017 的多項式，使得 $f(1) = 1$ ， $f(2) = \frac{1}{2}$ ， $f(3) = \frac{1}{3}$ ， $f(4) = \frac{1}{4}$ ， \dots ， $f(2018) = \frac{1}{2018}$ ，則 $f(2020)$ 的值為 _____。
- 設多項式 $f_n(x) = x^n + n$ ($n = 1, 2, 3, 4$)。已知從這四個多項式中任取兩個或三個或四個相異多項式的乘積，可得到 11 個多項式，若 $f(x)$ 為這 11 個多項式的和，則 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 _____。
- 已知 P 為 $\triangle ABC$ 的內部一點，滿足 $\angle PBA = 80^\circ$ ， $\angle PBC = 20^\circ$ ， $\angle PCB = 10^\circ$ ，且 $\angle PCA = 30^\circ$ ，則 $\angle APC$ 的度數為 _____ 度。
- 坐標平面上給定兩點 $A(-2, 0)$ 、 $B(8, 8)$ ，若點 P 為橢圓 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 上的動點，則 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 的最大值為 _____。
- 將編號 1, 2, 3, \dots , 12 的 12 個球放入甲、乙、丙三個箱子，若每一箱子至少一個球，且同一箱子中任意兩球之編號的差都不能等於 1，則有 _____ 種不同的分法。
- 在坐標空間中，給定一直線 $L: x - 1 = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$ 及兩點 $A(1, 1, 0)$ ， $B(1, 2, 0)$ 。若點 P 為直線 L 上的動點，則 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值為 _____。

12. 平面上有一圖形是由 n 條互不平行的直線所構成，已知它們共有 m 個交點，其中恰有兩條直線通過的交點有 k 個，其餘的 $m - k$ 個交點都恰有三條直線通過，則圖形中相鄰的交點所連成的線段有 _____ 條。(以 n, m, k 的數學式表示)
(註：相鄰的交點是指圖中同一直線上的兩個交點 A, B 滿足 \overline{AB} 內不含其他交點)

二、計算證明題：28%，每題 14 分。

- 試問：在(無窮)等差數列 $6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, \dots$ 中，是否存在2017個連續項都是合數？詳細說明你的理由！(舉例而言， $16, 21, 26$ 是此等差數列中的3個連續項且都是合數。)
- 在坐標平面上有一矩形 $ABCD$ ，其中 $A(0, 0), B(10, 0), C(10, 5), D(0, 5)$ 。設點 $P(x, y)$ 為矩形 $ABCD$ 的內部一點，且滿足：『可以在矩形 $ABCD$ 的邊界上依順時針方向標示出10個點 Q_1, Q_2, \dots, Q_{10} (A, B, C, D 為其中的四個點)，使得 $\triangle PQ_1Q_2, \triangle PQ_2Q_3, \dots, \triangle PQ_9Q_{10}, \triangle PQ_{10}Q_1$ 這十個三角形的面積都相等。』試問滿足條件的點 $P(x, y)$ 有多少個？請說明理由。

新北市立高級中等學校 106 學年度教師聯合甄選

數學科 答案

一、填充題：72%，每題 6 分。

1. 3
2. 1700
3. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (或 $\frac{2}{3-\sqrt{5}}, \frac{2}{3+\sqrt{5}}$)
4. $\frac{5}{12}$ (或 $0.4\overline{16}$)
5. $-\frac{9}{2}$ (或 $-4\frac{1}{2}, -4.5$)
6. $-\frac{1009}{1010}$ (或 $-\frac{2018}{2020}$ 亦可給分)
7. 345
8. 130
9. 22
10. 6138
11. $\sqrt{7}$
12. $3m - k - n$

二、計算證明題：28%，每題 14 分。

1. 略
2. 略