教育部受託辦理 106 學年度

公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

數學科試題

請注意：
本試題共兩部分，選擇題 12 題及綜合題 2 大題，共計 100 分；**選擇題請用 2B 鉛筆在<u>答案卡</u>劃記，綜合題請用藍、黑色鋼筆或原子筆在<u>答案卷</u>上作答**。<u>本科不可以使用電子計算器</u>

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題（每題 3 分，共 24 分）

(B) 1. 設 $a=\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$，則 $a^6-6a^4+9a^2+27$ 之值為 (A) 34 (B) 36 (C) 38 (D) 40。

(D) 2. 設 θ 為一銳角滿足 $\frac{16}{\sin^6\theta}+\frac{1}{\cos^6\theta}=81$，則 $\tan\theta=$ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$。

(A) 3. 設 $0<b<a$，且 a，b 滿足 $(\log_2 a)(\log_2 b)=-1$ 及 $ab=4$，則 $\log_a b$ 的值為

(A) $-3+2\sqrt{2}$ (B) $3+2\sqrt{2}$ (C) $3-2\sqrt{2}$ (D) $-3-2\sqrt{2}$。

(C) 4. 滿足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1899}$ 的正整數數對 $(x，y)$ 共有多少組？ (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20。

(B) 5. 在坐標平面上，A 點坐標為 $(-1，0)$，B 點坐標為 $(1，0)$，點 P 是直線 $x+y=4$ 上的一個動點，則向量 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}$ 長度的最小值為下列哪一個選項？

(A) 4 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{5}$。

(A) 6. 考慮滿足以下條件的正整數數對 $(x，y)$：(i) $106\le x\le 2017$；(ii) $106\le y\le 2017$；(iii) $8x-5y=37$。請問 $(x，y)$ 共有幾組解？ (A) 232 (B) 233 (C) 234 (D) 235。

(D) 7. 試問 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{3}{\sqrt{nk}}\right)$ 之值最接近下列哪一個選項？ (A) 3 (B) 2.7 (C) 2.6 (D) 2.5。

(B) 8. 箱中有 6 顆白球、 2 顆紅球、 2 顆黑球和 2 顆綠球，今由箱中每次取 1 球，取後不放回，取完為止。若每顆球被取到的機會均等，則白球最先取完的機率為何？

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{10}$。

二、複選題（每題 4 分，全對才給分，共 16 分）

(AD) 9. 已知 a，b，$c\in N$，且滿足 $a^{\log_b c}=a+b+c=9$，求 a^2+bc 可能的值為 (A) 17 (B) 18 (C) 20 (D) 22。

(AB) 10. 有二維數據如右表，已知 Y 對 X 以最小平方法所得的迴歸直線方程式為 $y=\frac{1}{2}x+3$，X 的標準差為 σ_X，Y 的標準差為 σ_Y，X 與 Y 的相關係數為 r，請選出正確選項。 (A) $b>5$ (B) $a<b$ (C) $|\sigma_Y-\sigma_X|>5$ (D) $r=0.3$。

X	1	2	2	3	2
Y	3	2	1	a	b

(CD)11. 已知圓內接 ΔABC 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=4$。若 $\angle A$ 的平分線分別交 BC 弦與 BC 弧於 D、E 兩點，則下列哪些選項是正確的？ (A) $\angle AEB:\angle AEC=3:2$ (B) $\overline{AD}:\overline{DE}=3:2$ (C) $\overline{AD}\times\overline{AE}=24$ (D) 設 P 為 BEC 弧上的一個動點，則 $\overline{AP}$ 長的最大值為 $\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$。

(BD)12. 設 A，B，C 均為二階方陣，且其各矩陣中的所有元均為整數，若滿足 $AB=\begin{bmatrix}2&2\\-2&6\end{bmatrix}$，$AC=\begin{bmatrix}5&1\\-13&3\end{bmatrix}$，試求矩陣 A 可能為下列何者？(A) $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}3&-1\\1&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}-3&1\\2&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$。

第二部分：綜合題（共 60 分）

一、填充題（每格 4 分，共 36 分，不必詳列計算過程，請列出題號依序作答，並將答案化至最簡，全對才給分）

1. 設級數 $f(n)=1^n-2^n+3^n-4^n+\cdots+2015^n-2016^n+2017^n$，求 $\dfrac{f(1)f(2)}{f(3)}=$ $\underline{\dfrac{2017}{4033}}$ 。
2. 四邊形 $ABCD$，已知 $\angle A=120^\circ$，B 和 D 都是直角，$\overline{AB}=13$，$\overline{AD}=46$，試求 $\overline{AC}=$ $\underline{62}$ 。
3. 空間中，$A(4,-4,4)$、$B(2,0,0)$、$C(-1,0,-3)$、D 四點同在一平面 E 上，若 $ABCD$ 為一等腰梯形且 $\overline{AB}//\overline{CD}$，求 D 點坐標為 $\underline{(3,-8,5)}$ 。
4. 設圓內接十二邊形有六條邊的邊長為 2，另六條邊的邊長為 3，則此十二邊形的面積為 $\underline{36+\dfrac{39\sqrt{3}}{2}}$ 。
5. 求值：$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+8k^2+15k}=$ $\underline{\dfrac{139}{1800}}$ 。
6. 在空間中，設球體 S_1：$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\le 4$，球體 S_2：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\le 9$。若 S_1 和 S_2 的交集區域為 T，則區域 T 的體積為 $\underline{4\pi}$ 。
7. 設 z 為複數，若 $|z|=2$，則 $|z^2-2z+8|$ 的最小值為 $\underline{\sqrt{14}}$ 。
8. 將拋物線 $y=x^2+2x-1$ 沿著 $y=\dfrac{x}{2}-3$ 平行移動，使其與直線 $y=2x-7$ 相切，請問移動後的拋物線方程式為 $\underline{y=x^2-6x+9}$ 。

9. 設 P 為直線 $x-y+5=0$ 上一點，Q 為雙曲線一支 Γ ： $x=\sqrt{\frac{9}{4}y^2+9}$ 上一點，求 $\overline{PQ}$ 最小值＝

$\underline{\quad\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\quad}$ 。

二、計算證明題（每題 8 分，共 24 分，必須詳列計算過程，請列出題號，依序作答，分段給分）

1. (1) 若 $(\sqrt{2}-1)^5=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ ，則正整數 m 之值為何？(2 分)

(2) 請證明存在某一正整數 m 滿足：$(\sqrt{2}-1)^{2017}=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ 。(6 分)

2. 平面上 ΔABC 為一個三角形，$\overline{AB}\neq\overline{AC}$ ，$\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，證明：

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AC}-\overline{BD}\times\overline{CD}}$ 。

3. 已知函數 $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$

(1) 若函數 $y=f(x)$ 的圖形上存在點 P，使點 P 處的切線與 x 軸平行，求實數 a，b 的關係式。(4 分)

(2) 若函數 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=3$ 時取得極值，且其圖形與 x 軸有 3 個交點，求實數 c 的範圍。(4 分)