國立臺南家齊女中100 學年度第1次專任及代理教師甄試

數學科試題

一、 填充題 (每格5分，共40分)

1. 若 X 的動差生成函數(moment generating function)是
$$M(t)=\frac{2}{7}e^{t}+\frac{1}{7}e^{2t}+\frac{3}{7}e^{3t}+\frac{1}{7}e^{4t},$$
則求 X 的期望值及變異數分別為 ________。

2. 解不等式 $(x-1)(x-2)^4(x-3)^3(2x^2+4x+5)\le 0$，求 x 的範圍為 ________。

3. 設實數 x,y,z 滿足 $x^2+y^2+z^2=16$，求 $2x+3y-6z$ 的最大值及最小值分別為 ________。

4. 已知雙曲線方程式為 $2x^2-y^2=4$，求斜率為2的切線方程式為 ________。

5. 五男五女參加一個舞會，規定一定要男女生共舞，
   (1) 當第一首曲子放下時，男女任意配對有 $5!$ 種方法。而當第二首曲子放下時，規定必須交換舞伴，則跳第二首時有________種配對方法。
   (2) 當第三首曲子放下時，不但規定交換舞伴且舞伴均需與前二首不同（亦即三首的舞伴皆不相同），則跳第三首時有________種配對方法。

6. 若 $a<b<c<d<e$ 是連續的正整數，$b+c+d$ 是完全平方數，$a+b+c+d+e$ 是完全立方數，求 c 的最小值為________。

7. 設 $z_1,z_2\in C$，$|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，則 $\log_3\left|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}\right|=$____。

二、 計算題 (詳列計算過程，否則不予計分) (每題5分，共35分)

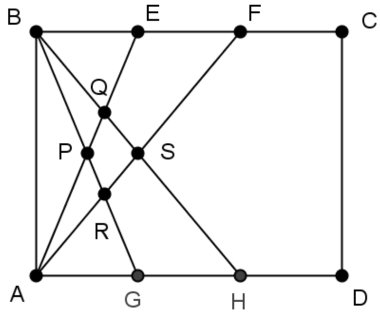
1. 求 $\left(\dfrac{1}{-\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ 的值。

2. $A(6,0,0)$，$B(-3,3\sqrt{2},3)$ 為球面 $x^2+y^2+z^2=36$ 上兩點，今有一隻公蟻沿著球面由 A 爬到 B，公蟻的爬行路線中最短距離是多少?

3. 解函數方程 $f(x)+\log x \cdot f(\frac{1}{x})=2^x$ ，其中 $x>0$ 。

4. 試求滿足 p^3+2p^2+p 恰有 42 個正因數這個條件的最小質數 p 爲多少?

5. 在矩形 ABCD 中，G、H 爲 $\overline{AD}$ 的三等分點，E、F 爲 $\overline{BC}$ 的三等分點，若 $\overline{AB}$ ＝ 36， $\overline{BC}$ ＝45，試求四邊形 PQSR 的面積。

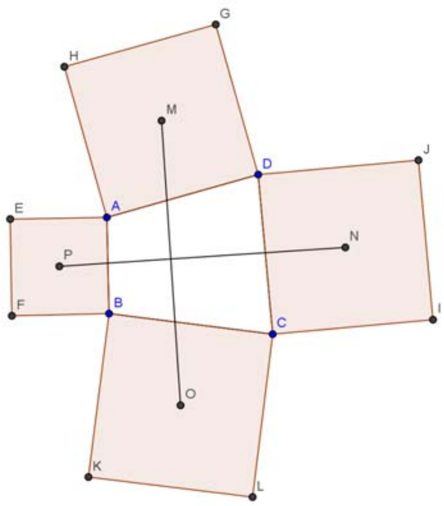


6. 若$[x]$表示不大於x的最大整數，則$\sum_{n=1}^{96}\left[\frac{53n}{97}\right]=?$

7. 設 $x\geq 0$ ，試問不等式$\sqrt[3]{4(x+8)}\leq\sqrt[3]{x}+2$之解爲何？

三、証明題（25%）

1.設任意四邊形 ABCD 的四個邊向外作正方形的四個中心點依序爲 M、N、O、P，試證 $\overline{PN}=\overline{MO}$ 且 $\overline{PN}\perp\overline{MO}$ （15%）



2.利用歸納法證明： $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ ，其中 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。 （10%）