國立臺南第二高級中學106學年度第1次教師甄選數學科試題

一、填充題：每題5分，本大題共70分

1. 已知$A(1,1,2)$、$B(-1,0,3)$、$C(3,8,1)$及D點為空間中四點，其中D在$L:\begin{cases}2x+y-z=3\\x-y+7z=9\end{cases}$上，求四面體$ABCD$之體積 ________

2. 一四面體ABCD置於空間坐標系中，其中$A(0,0,0)$，D在z軸上。若$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=3$，$\overline{BD}=\overline{CD}=4$，$\overline{AD}=5$，將此四面體繞$z$軸旋轉一圈，繞行的區域所得體積為 ________

3. 若$\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{3}{2}\pi$且$y=\dfrac{5\cos x}{3-\cos x}$，試求$y$的範圍 ________

4. 設A、B、O為複數平面上三點，分別表示複數α、β、0。若α、β同時滿足$|\alpha-3|=1$ 和 $\beta=(-1+i)\alpha$，則$\triangle ABO$面積最大值與面積最小值的總和為________

5. 若已知實函數 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{6+x-x^2}}$ ，則 f(x)的定義域為________

6. $(7242409)^{10}$除以 101×102 的餘數為________

7. 解方程式 $2x^6-3x^5+4x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$ ，得到的6個根中，落在複數平面第一象限的所有根為________

8. 數學科普作家馬丁·加德納(Martin Gardner, 1914-2010)曾說：「世界上僅存在一個九位數，其中首位數是1的倍數，前兩位數是2的倍數，前三位數是3的倍數，⋯，前八位數是8的倍數，前九位數是9的倍數，但是1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9每個數字都只能出現一次。」請問這個九位數為________

9. 已知一數列$\langle a_n\rangle$，其中 $a_n=n^3+2n^2-200n$，n為正整數，則 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}|a_n|=$ ________

10. 若$1,2,3,4,..99998,99999,100000$這十萬個正整數中，各位數字和不大於10的正整數有k個，（例如：3211就是其中一個，因為$3+2+1+1=7\le10$。）試求k的值=________

11. 設ΔABC之外心為O, 垂心為H, 若$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 且$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 則數對$(x,y)=$______

12.已知函數 $y=x+\log_2(kx^2)$ 的圖形與函數 $y=x+2^{|x|}$ 的圖形交於 A、B 兩點。

若 $\overline{AB}=6\sqrt{2}$，則 $k=$______。

13. 三人猜拳(剪刀、石頭、布)直到最後有一人獲勝為止，則猜拳次數的期望值為________

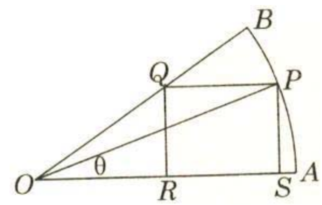
14. 設 $S=\dfrac{2^2}{1\times3}+\dfrac{4^2}{3\times5}+\dfrac{6^2}{5\times7}+...+\dfrac{2016^2}{2015\times2017}$。求與 2S 最接近的整數為 ________

二、計算與證明題：每題 10 分，本大題共 30 分

1. 如圖，矩形 $PQRS$ 內接於半徑為 3 且中心角為 $\dfrac{\pi}{3}$ 之扇形 OAB，

(1)將 $\overline{RS}$、$\overline{PS}$ 以 θ（$\theta=\angle POA$）的函數表之（2 分）

(2)求矩形 $PQRS$ 的最大面積　　　　　（8 分）



2. 用 4 種顏色塗正 n 邊形的 n 個邊，若規定相鄰邊不同顏色，其方法有 a_n 種。

(1) 試求 a_3 及 a_4 的值。(4分)

(2) 試以 n 表示出 a_n 的值，其中 $n\geqq3$。(6分)

3. 求函數 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值及此時的 x 值。(10 分)

國立臺南第二高級中學106學年度第1次教師甄選數學科試題參考答案

一、填充題：每題5分，本大題共70分

1. **1**

2. $\frac{48}{5}\pi$

3. $-\frac{5}{4} \le y \le 0$

4. **10**

5. $\{x \mid x < -2$ 或 $-1 \le x < 3\}$

6. **1327**

7. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 或 $\frac{3+\sqrt{7}i}{4}$

8. **381654729**

9. **24402**

10. **2998**

11. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$

12. $\frac{256}{9}$

13. $E = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times (1 + \frac{3}{2}) + \frac{1}{3} \times (1 + E) \Rightarrow E = \frac{9}{4}$

14. **2017**

二、計算與證明題參考答案：每題 10 分，本大題共 30 分

1. 答：(1) $\overline{PS}=\overline{QR}=3\sin\theta$

$$\overline{RS}=\overline{OS}-\overline{OR}=\overline{OS}-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{QR}=3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$$

(2) 面積最大為 $3\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

2. **(1)** $\boldsymbol{a_3=24, a_4=84}$

(2) $a_n=3^n+3(-1)^n \quad , n\geq 3$

3. **最小值為 4**

此時 $\mathbf{x}=\sqrt{2}$