考慮橢圓標準式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$：

設橢圓上任一點$P(x,y)$與中心$O(0,0)$的距離$\overline{OP}=D(\theta)$ (θ為$\overline{OP}$與x軸夾角)

如下圖，已知橢圓參數式為$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$，$0\le t\le 2\pi$

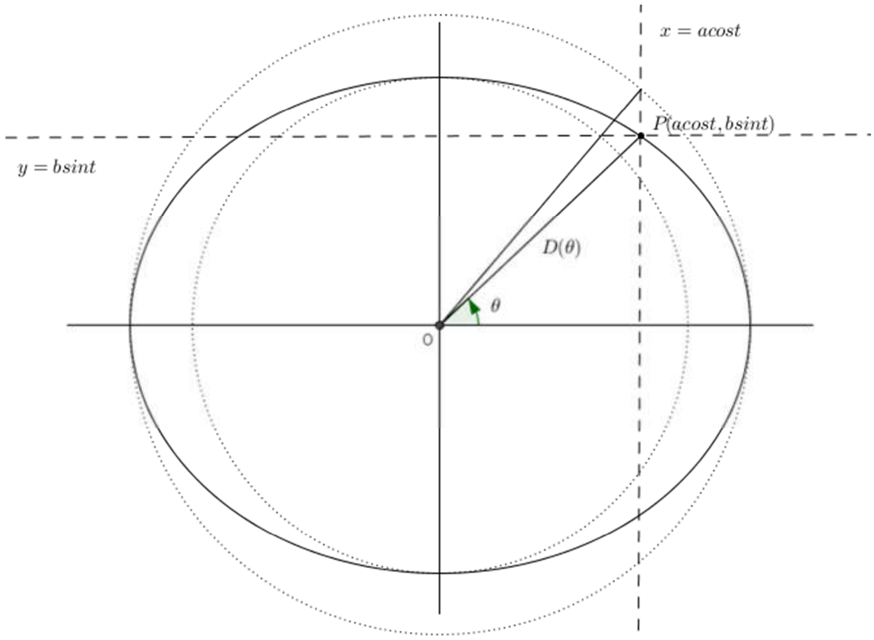

圖 2.1：橢圓圖形

首先由$\tan\theta=\frac{b\sin t}{a\cos t}=\frac{b}{a}\tan t$：

將等號兩邊同乘以$\frac{b}{a}$，即$\tan t=\frac{a}{b}\tan\theta$；

接著，因為$\frac{1}{\cos^2 t}=\tan^2 t+1=\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)^2+1=\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta+1$；

左右兩式分別取倒數，可得$\cos^2 t=\frac{b^2}{a^2\tan^2\theta+b^2}=\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$

(2.1)

接下來，我們將利用(2.1)式的結果，計算出$\overline{OP}$與θ的關係式，也就是我們想要得到的結果。

$$\left(\overline{OP}\right)^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = \left(\cos^2 t\right)\left(a^2 + b^2\tan^2 t\right)$$

$$= \left(\cos^2 t\right)\left[a^2 + b^2\left(\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta\right)\right] = a^2\left(\cos^2 t\right)\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$= \left(\cos^2 t\right)\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right) = \left(\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\right)\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} \tag{2.2}$$

因此由(2.1)式、(2.2)式得： $D(\theta) = \overline{OP} = \left(\dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\right)^{1/2}$