# 國立臺灣師大附中 106 學年度 數學科 第一次教師甄選試題

## 第一部分:填充題（每格 4 分，共計 52 分）

1. NBA 華裔球星林書豪所屬的籃網隊在演練教練的 LIN-7 戰術：控球後衛林書豪運球至前場之後，連同林書豪在內的場上 5 名球員由持球者自行選擇將球傳給 4 名隊友的其中一人，如此傳球 7 次，且第 7 次須將球傳回給林書豪由他投籃，則 LIN-7 戰術的傳球方式共有 __________ 種。

2. 設 $S_n$ 為由 $n$ 個整數為元素所構成的集合。欲使 $106^{106}$ 恆可整除 $\displaystyle\prod_{\substack{1\le i<j\le n \\ a_i, a_j \in S_n}} (a_i - a_j)$，$n$ 至少為 __________ 。

3. 已知 $f(x)=\dfrac{x^4+rx^2+1}{x^4+x^2+1}$，其中 $r\in\mathbb{R}$。若對於任意 3 實數 $a,b,c$，$f(a), f(b), f(c)$ 恆可成為一個三角形之三邊長，則 $r$ 的範圍為 __________ 。

4. 在十進位制下，$D_n$ 為介於 0 與 1 之間的 $n$ 位純小數中，各位數字均為 0 或 1 且小數點以下第 $n$ 位數為 1 的數所成集合，例如：$D_3=\{0.001, 0.011, 0.101, 0.111\}$。設 $D_n$ 中元素的算術平均數為 $d_n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=$ __________ 。

5. 一袋中有大小材質均相同的 13 顆球，其中 3 球為白球，4 球為紅球，6 球為黑球。今自袋中逐次隨機取球，每次取一球，取後不放回，則紅球先於其他色球取完的機率為 __________ 。

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，點 $D$ 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{BD}=1$，且 $\overline{DA}=\overline{DC}$，若 $\angle DCA=\theta$，則 $\sin 3\theta=$ __________ 。

7. 已知橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦點為 $F$，$P$ 為 $\Gamma$ 上一點，點 $A(0,2\sqrt{3})$，當 $\triangle APF$ 的周長最大時，$\triangle APF$ 的面積為 __________ 。

8. 已知 $\overline{AB}$ 是以 $C(0,1)$ 為圓心且與函數 $y=\dfrac{1}{|x|-1}$ 的圖形有交點的所有圓中半徑最小的圓的一條直徑，$O$ 為原點，則 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=$ __________ 。

9. 函數 $f(x)=\tan\dfrac{1}{2}x+\tan\dfrac{2}{3}x$ 的最小正週期為____________。

10. 已知半徑為 $\frac{\sqrt{22}}{2}$ 的球的球心 $O$ 為正四面體 $\Omega$ 的中心，且球 $O$ 的球面被 $\Omega$ 的四個面截得的曲線總長度為 $8\pi$ ，則 $\Omega$ 的體積為 ________ 。

11. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_0=0, 5a_{n+1}=4a_n+3\sqrt{1-a_n^{\ 2}}$ ， $n\in\mathbb{N}$ ，若 $S_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$ ，則 $S_{101}=$ ________ 。

12. 聯立方程式 $\begin{cases}ab=cd\\ a+b+c+d=265\end{cases}$ 的正整數解有________ 組。

13. 某次選舉有甲、乙兩位候選人，經 150 人投票開票後，已知甲獲得 99 票、乙獲得 51 票，試問開票過程中，能使甲候選人最多落後乙候選人 1 票的機率是 ________ 。

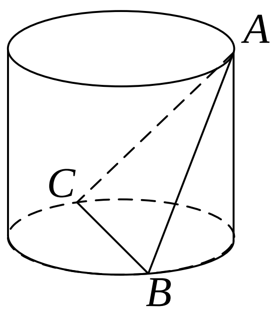
## 第二部分:計算證明題（每題 8 分，共計 48 分）

1. 請依據附中學生中等程度，設計一題有五個選項的多選題，範圍為「函數的極限」，並分析各選項學生可能答錯的狀況與答錯的原因。

2. 請寫出您的「多項式函數的微分」單元之教學流程，包含如何引起動機和課程重點等。(總字數限 200 字)

3. 甲、乙兩學生已寫出下列題目的解法，請辨別甲、乙的解法是否正確，若有錯誤的地方，請您寫出正確的解法。

如圖，空間中有一底面半徑為10公分的實心圓柱體， $A$ 點在上底面圓周上，設平面 $E$ 通過 $A$ 點與下底面的直徑 $\overline{BC}$ ，將此圓柱體分割為兩部分，若平面 $E$ 與下底面的夾角為 $60°$，求此圓柱體被分割後較小部分的體積為何?




甲的解法：所求體積

$$=\frac{1}{3}\times\text{底面積}\times\text{高}=\frac{1}{3}\cdot\frac{100\pi}{2}\cdot10\sqrt{3}=\frac{500\pi}{3}\sqrt{3}(cm^3)$$

乙的解法：利用與平面 $E$ 平行的平面，可得與此圓柱體較小部分的截面為正三角形

$\Rightarrow$所求體積

$$=\int_0^{20}\frac{\sqrt{3}}{4}x^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{20}=\frac{2000}{3}\sqrt{3}(cm^3)$$

4.已知 $a, b, c$ 為 $2x^3-2x^2+3x-1=0$ 的三個根，求方程組 $\begin{cases} x+ay+a^3z=a^4 \\ x+by+b^3z=b^4 \\ x+cy+c^3z=c^4 \end{cases}$ 的解 $(x, y, z)$ 。

5. 凸四邊形 $ABCD$ 滿足 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$，問此四邊形是否必有內切圓？若是，請證明；若否，請舉反例並說明。

6. $a, b, c$ 皆為正數，且 $a+b+c=1$。試證明：$\dfrac{a^2+b^2}{a+3b}+\dfrac{b^2+c^2}{b+3c}+\dfrac{c^2+a^2}{c+3a}\geq\dfrac{1}{2}$ 。