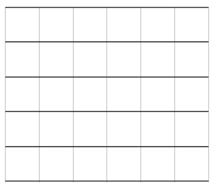
106 麗山高中

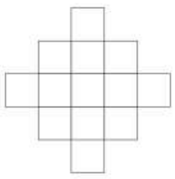
一、填充題：(15 格，每格 4 分；共 60 分)

1. 下圖為某班的教室座位配置圖，現將甲、乙、丙等 30 位同學隨機安排入坐，每格恰坐 1 位，則甲、乙、丙三人彼此皆不相鄰的機率為____(A)____。 (前後相鄰或左右相鄰都算相鄰)



2. 已知$10=2^3+2$可用二進位表示為$(1010)_2$，是二進位中的 4 位數；$100=2^6+2^5+2^2$可用二進位表示為$(1100100)_2$，是二進位中的 7 位數。請問10^{100}是二進位中的___(B)___位數。（$\log 2=0.3010$）

3. 如圖，13 個小正方形排列，若要塗上紅、黃、藍三種顏色，並規定每個小正方形恰塗一色，相鄰不同色，則有___(C)___種塗法。



4. 四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{BC}=\overline{CD}$，$\angle ABC=114°$，$\angle BCD=144°$，$\angle BAC=30°$，則$\angle ADC=$___(D)___。

5. 若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=L$，則 x 與 2 的距離$|x-2|$小於等於何值時，其函數值與 L 的差$\left|\dfrac{1}{x}-L\right|$最多是$\dfrac{1}{10000}$？___(E)___。

6. 設 $\overrightarrow{a}$ =（5，－5，－2），$\overrightarrow{b}$ =（2，1，－2），$\overrightarrow{c}$ =（2，-2，1），

則$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+s\overrightarrow{c}\right|$的最小值＝___(F)___。

7. 若$x^2-13x+1=0$，則x^4+x^{-4}的個位數字＝___(G)___。

8. 已知一雙曲線上任一點$P(x,y)$滿足到直線$4x+y=2$及$4x-y=0$的距離乘積為定值 2，則該雙曲線的焦點到中心的距離為___(H)___。

9. 求不等式 $-3<[\,|x-1|-6\,]<3$ 的解為____(I)____。（ $[\,x\,]$ 表不大於 x 之最大整數 ）

10. 設二階方陣$\begin{bmatrix} x+\dfrac{1}{x} & x^5+\dfrac{1}{x^5} \\ x^{27}+\dfrac{1}{x^{27}} & |x| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & a \\ b & c \end{bmatrix}$，則序對$(a,b,c)=$____(J)____。

11. 設$0\le\theta<2\pi$，不等式$\sin\theta+\sin 2\theta>0$的解為___(K)___。

12. 設$a,b,c,d\in R,abcd\neq 0$，且$a+b+c+d=0$，則

$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+d(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ 之值為__(L)__。

13. 設$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，試求$f(\frac{1}{2017})+f(\frac{2}{2017})+f(\frac{3}{2017})+...f(\frac{2016}{2017})=$__(M)__。

14. 已知 $0^\circ<\theta<90^\circ,i=\sqrt{-1}$，$O$為原點，若複數平面上 $z=\cos\theta+i\sin\theta$所在的位置為點 P，z^4 所在的位置為點 Q，iz 所在的位置為點 R 且 $\theta,\angle POQ,\angle QOR$ 三個角度依序成等比數列,則 $\theta=$__(N)__。

15. 空間中 O 為原點，已知 $A(1,-1,-2)$，$B(3,2,-1)$，$C(1,-2,1)$，若由 $\frac{1}{2^n}\overrightarrow{OA}$，$\frac{1}{3^n}\overrightarrow{OB}$，$\frac{1}{4^n}\overrightarrow{OC}$ 所決定的平行六面體體積記為V_n，則$\sum_{n=1}^{\infty}V_n=$__(O)__。

二、計算證明、申論題：(5 題，每題 8 分；共 40 分)

1. 設六個正數a、b、c、x、y、z，滿足$a+b+c=x+y+z$，求證：$\frac{2a^2}{a+x}+\frac{2b^2}{b+y}+\frac{2c^2}{c+z}\geq a+b+c$。

2. 設p,q 為大於 1 的正整數，若$p>q$， $x>0$；試證：$\frac{x^p-1}{p}\geq\frac{x^q-1}{q}$ 。

3. 如下圖所示，扇形AOB的圓心角$\angle AOB=\theta$，$\overline{OA}=1$，圓O_1與$\overline{OA}$,$\overline{OB}$,弧AB均相切，圓O_{n+1}的半徑比圓O_n小且與圓O_n外切，並與$\overline{OA},\overline{OB}$均相切，圓$O_n$的面積為$a_n$，$n=1,2,3,...$ 試求極限 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}a_k}{\theta}$。

4. (1) 某金融卡的提款密碼規定為四碼，每一碼可以選用數字或英文字母，但密碼不能全部都只有英文字母(不區分大小寫)或全部都只有數字，請問共有幾組不同密碼可以選用？

(2) 請詳述您針對(1)小題的課程概念，讓學生正確學習相關數學觀念。

5. (1) $\triangle ABC$中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$，設$P$、$Q$分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，且滿足$\triangle APQ$面積為$\triangle ABC$面積之一半，求$\overline{PQ}$ 之最小值？

(2) 請詳述您針對 (1)小題的課程概念，讓學生正確學習相關數學觀念。