國立嘉義女子高級中學 100 學年度數學科(甄選老師)試題

姓名:________________

一、填充題：(60%每題 10%)

1.同式樣之白棋 3 個、黑棋 2 個，任意排成一列，在不知道排列順序下，去猜黑白棋之排列順序，則猜對三個位置的機率為_______________。

2.兩拋物線 $y=x^2-3x+2$，$y=2x^2-5x+a$（$a\in R$）相交於兩相異點 P，Q 若 $\overline{PQ}=4$，則 $a=$？_________。

3.一袋中有 1 號卡片 n 張，2 號卡片 $n-1$ 張，⋯，k 號卡片$(n-k+1)$張，⋯，n 號卡片 1 張，任意自袋中抽取 1 張卡片，試求其號碼的期望值=____________。

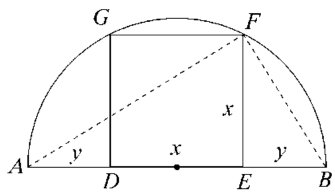
4.想用每小時 10 浬的速度駕駛遊艇筆直前往北 30°東方向上相距 50 浬的小島，現已知這附近一帶有北 60°東方向速度 4 浬的潮流，問遊艇應朝何方向駕駛______________。（$\sin 11^\circ 32'=\frac{1}{5}$）

5.若$\theta\in R$，$\dfrac{\cos\theta+4}{\sin\theta-3}$之最小值為 m，最大值為 M，則數對$(m，M)=$ __________。

6.正四面體的四頂點落在兩歪斜線 L_1：$\begin{cases}x=4+t\\ y=-3-t\\ z=0\end{cases}$，$t\in R$ 與 L_2：$\begin{cases}x=2+s\\ y=2+s\\ z=1\end{cases}$，$s\in R$ 上，求此四面體的稜長____________。

二、計算與証明題：(40%每題 10%)

1.如下圖，正方形 $DEFG$ 內接於直徑為 $\overline{AB}$ 的半圓，其中 G，F 在半圓弧上，D，E 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AD}=\overline{BE}$，試證：(1)$E$ 為 $\overline{BD}$ 的黃金分割點 (5%) (2)△AFB 為黃金三角形 (5%)



2.設數列$\langle F_n\rangle$滿足 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$，$n\in N$，若 $x^2-x-1=0$ 的兩根為α，β，其中$\alpha>\beta$，試證：$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$。

3.數列$\dfrac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}$，$\dfrac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2}$，$\dfrac{8\cdot 3}{5^2\cdot 7^2}$，⋯，$\dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$，⋯，若 S_n 表前 n 項之和，且 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ (1)求 S_n 及 S。 (5%) (2)求使 $S-S_n<\dfrac{1}{10000}$ 成立的最小自然數 n 的值。(5%)

4.實數 a，b，c 滿足 $3(a^2+b^2)=4c^2$，$c\neq 0$，

(1)試證：直線 $ax+by+c=0$ 與圓 $x^2+y^2=1$ 交於相異兩點 P，Q。(5%)

(2)求弦 $\overline{PQ}$ 的長。(5%)

國立嘉義女子高級中學 100 學年度數學科(甄選老師)試題及答案

姓名:________________

一、填充題(60%)

1.同式樣之白棋 3 個、黑棋 2 個，任意排成一列，在不知道排列順序下，去猜黑白棋之排列順序，則猜對三個位置的機率為_______________。

【解答】 $\dfrac{C_2^3 C_1^2}{C_2^5} = \dfrac{3}{5}$

【詳解】

(A) $C_2^5 = 10$

(B)全部猜錯的機率為 0

(C) 猜對一個位置的機率為 $\dfrac{C_1^3}{C_2^5} = \dfrac{3}{10}$

(D)猜對二個位置的機率為 0

2.兩拋物線 $y = x^2 - 3x + 2$，$y = 2x^2 - 5x + a$（$a \in R$）相交於兩相異點 P，Q 若 $\overline{PQ} = 4$，則 $a =$？_________。

【解答】$a = 1$

【詳解】

(1) $2x^2 - 5x + a = x^2 - 3x + 2$ 有兩解 $\Rightarrow$ $x^2 - 2x + (a-2) = 0$ 有相異兩實根

$\Rightarrow$ 判別式 $= (-2)^2 - 4(a-2) > 0$ $\Rightarrow$ $a < 3$

(2) $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 & \cdots\cdots① \\ y = 2x^2 - 5x + a & \cdots\cdots② \end{cases}$

① $\times 2 -$ ② $\Rightarrow$ $y = -x + 4 - a$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{PQ}$ ：$x + y - 4 + a = 0$

(3)設 $x^2 - 2x + (a-2) = 0$ 兩根為 α，β，則可令 $P(\alpha，\alpha^2 - 3\alpha + 2)$，$Q(\beta，\beta^2 - 3\beta + 2)$

$\Rightarrow$ $\overline{PQ}^2 = \{\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + [\alpha^2 - \beta^2 - 3(\alpha-\beta)]^2}\}^2 = (\alpha-\beta)^2[1 + (\alpha+\beta-3)^2]$

因 $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha \cdot \beta = a - 2 \end{cases}$，故 $\overline{PQ}^2 = (\alpha-\beta)^2[1 + (2-3)^2] = 2(\alpha-\beta)^2 = 2[(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta]$

$= 2[4 - 4(a-2)] = 24 - 8a$，$24 - 8a = 16$ $\Rightarrow$ $a = 1$

3.一袋中有 1 號卡片 n 張，2 號卡片 $n-1$ 張，⋯，k 號卡片$(n-k+1)$張，⋯，n 號卡片 1 張，任意自袋中抽取 1 張卡片，試求其號碼的期望值=____________。

【解答】 $\dfrac{n+2}{3}$

【詳解】

所有卡片共有 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 張

抽到卡片號碼為 k 號的機率為 $\dfrac{n-k+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2(n-k+1)}{n(n+1)}$

∴　所求期望值$=\sum_{k=1}^{n}k\ \cdot\ \dfrac{2(n-k+1)}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}\ \sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$

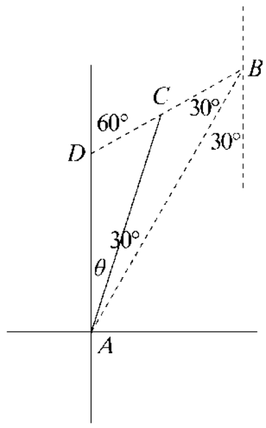
$=\dfrac{2}{n(n+1)}\ \sum_{k=1}^{n}[k(n+1)-k^2]\ =\ \dfrac{2(n+1)}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k-\dfrac{2}{n(n+1)}\ \sum_{k=1}^{n}k^2\ =\dfrac{n+2}{3}$

4.想用每小時 10 浬的速度駕駛遊艇筆直前往北 30°東方向上相距 50 浬的小島，現已知這附近一帶有北 60°東方向速度 4 浬的潮流，問遊艇應朝何方向駕

（$\sin 11^\circ\ 32'=\dfrac{1}{5}$）

【解答】18°28′

【詳解】



如上圖，設 A 為出發點，B 為小島，潮流方向為 $\overrightarrow{DB}$

又設遊艇船頭朝北 θ 東方向航行，亦即船頭沿著 $\overrightarrow{AC}$ 方向行駛

遊艇因受潮流影響實際上遊艇是沿著 $\overrightarrow{AB}$ 方向往終點站 B 小島前進

由外角關係得：$\angle ABC=30^\circ$，$\angle BAC=30^\circ-\theta$

若遊艇由 A 至 C 要 t 小時，則 $\overline{AC}\ =10t$，$\overline{BC}\ =4t$

在△ABC 中，由正弦定理可得 $\dfrac{4t}{\sin(30^\circ-\theta)}=\dfrac{10t}{\sin 30^\circ}$ ，亦即 $\sin(30^\circ-\theta)=\dfrac{1}{5}$

∴　$30^\circ-\theta=11^\circ\ 32'$，亦即 $\theta=18^\circ 28'$，故知遊艇船頭必須朝北 18°28′東的方向前進

5.若$\theta\in R$，$\dfrac{\cos\theta+4}{\sin\theta-3}$之最小值為 m，最大值為 M，則數對$(m，M)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\dfrac{-6-\sqrt{6}}{4}\ ，\dfrac{-6+\sqrt{6}}{4})$

【詳解】

利用二倍角公式 $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ，其中 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}\in R$

$$\frac{\cos\theta+4}{\sin\theta-3}=\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+4}{\frac{2t}{1+t^2}-3}=\frac{3t^2+5}{-3t^2+2t-3}$$

令 $\frac{3t^2+5}{-3t^2+2t-3}=\frac{k}{1}$ $\Rightarrow$ $(3k+3)t^2-2k\,t+(3k+5)=0$

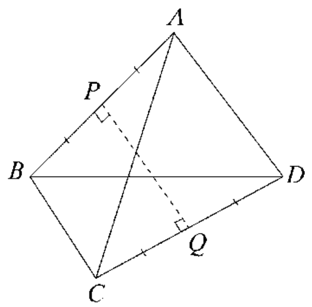
判別式 D：$(2k)^2-4(3k+3)(3k+5)\ge 0$（$\because$ $t\in R$） $\Rightarrow$ $8k^2+24k+15\le 0$

$\Rightarrow$ $\frac{-6-\sqrt{6}}{4}\le k\le\frac{-6+\sqrt{6}}{4}$，即$(\frac{-6-\sqrt{6}}{4})\le\frac{\cos\theta+4}{\sin\theta-3}\le(\frac{-6+\sqrt{6}}{4})$

6.正四面體的四頂點落在兩歪斜線 L_1：$\begin{cases}x=4+t\\y=-3-t\\z=0\end{cases}$，$t\in R$ 與 L_2：$\begin{cases}x=2+s\\y=2+s\\z=1\end{cases}$，$s\in R$ 上，求此四面體的稜長。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】



設 L_1，L_2 公垂線的端點各為 $P(4+t，-3-t，0)$，$Q(2+s，2+s，1)$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}=(s-t-2，s+t+5，1)$ $\because$ $\overrightarrow{PQ}\perp L_1$，$\overrightarrow{PQ}\perp L_2$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}\cdot(1，-1，0)=0$，$\overrightarrow{PQ}\cdot(1，1，0)=0$ $\Rightarrow$ $s=-\frac{3}{2}$，$t=-\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ $\overline{PQ}=1$

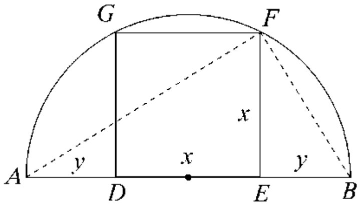
設正四面體的稜長為 a $\therefore$ $\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{AP}=\frac{a}{2}$

在△APQ 中，$\overline{AQ}^2=\overline{PQ}^2+\overline{AP}^2$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{4}a^2=1+(\frac{a}{2})^2$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{2}$

二、計算與証明題(40%)

1.如下圖，正方形 $DEFG$ 內接於直徑為 $\overline{AB}$ 的半圓，其中 G，F 在半圓弧上，D，E 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AD}=\overline{BE}$，試證：

(1)E 為 $\overline{BD}$ 的黃金分割點 (2)△AFB 為黃金三角形



【證明】

(1)設正方形 $DEFG$ 的邊長為 x，$\overline{AD}=\overline{BE}=y$，因直角△$AFE$～直角△$FBE$

所以 $\dfrac{x+y}{x}=\dfrac{x}{y}$，得 $1+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，即$(\dfrac{x}{y})^2-(\dfrac{x}{y})-1=0$，故 $\dfrac{x}{y}=\Phi$

因此 E 為 $\overline{BD}$ 的黃金分割點

(2)由直角三角形子母相似定理知

$\overline{BF}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BA}=y(2y+x)=y(2y+\Phi y)=y^2(\Phi+2)$

$\overline{AF}^2=\overline{AE}\cdot\overline{AB}=(x+y)(x+2y)=(\Phi y+y)(\Phi y+2y)=y^2(\Phi+1)(\Phi+2)$

所以 $\overline{AF}^2=y^2(\Phi+1)(\Phi+2)=y^2\Phi^2(\Phi+2)$（因 $\Phi^2=\Phi+1$）$=\Phi^2\overline{BF}^2$

得 $\overline{AF}=\Phi\overline{BF}$，故△$AFB$ 是黃金直角三角形

2.設數列$\langle F_n\rangle$滿足 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$，$n\in N$，若 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 α，β，其中 $\alpha>\beta$，試證：$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\dfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt5}{2})^n]$。

【證明】

方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

因此有 $\alpha^2=\alpha+1$，$\beta^2=\beta+1$，兩邊分別同乘 α^n，β^n

得 $\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$，$\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n$……①

因為 $\alpha+\beta=1$，$\alpha-\beta=\sqrt5$，將①式相減，各除以 $\alpha-\beta$，得 $\dfrac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$

令 $\mu_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，則 $\mu_1=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$，$\mu_2=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$，且 $\mu_{n+2}=\mu_{n+1}+\mu_n$，$n\in N$

故 μ_n 顯然是數列$\langle F_n\rangle$，所以 $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\dfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt5}{2})^n]$

3.數列 $\dfrac{8\cdot1}{1^2\cdot3^2}$，$\dfrac{8\cdot2}{3^2\cdot5^2}$，$\dfrac{8\cdot3}{5^2\cdot7^2}$，…，$\dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$，…，若 S_n 表前 n 項之和，且 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，

(1)求 S_n 及 S。　(2)求使 $S-S_n<\dfrac{1}{10000}$ 成立的最小自然數 n 的值。

【解答】(1) $S_n=\dfrac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1}$，$S=1$　(2) $n=50$

【詳解】

(1)因為 S_n 為級數的前 n 項之和，則 $S_n=\frac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2}+\frac{8\cdot 3}{5^2\cdot 7^2}+\cdots+\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}]$

$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}=1-\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1}$

$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{4}=1$

(2)欲使 $S-S_n<\frac{1}{10000}$

$\Rightarrow\quad 1-[1-\frac{1}{(2n+1)^2}]<\frac{1}{10000}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{10000}$

$\Rightarrow\quad (2n+1)^2>10000$（$\because\quad 2n+1>0$） $\Rightarrow\quad 2n+1>100\quad\Rightarrow\quad n>49.5$

故取最小自然數 $n=50$

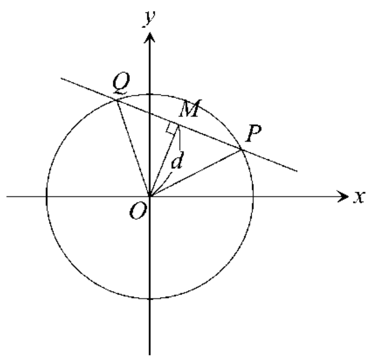
4.實數 a，b，c 滿足 $3(a^2+b^2)=4c^2$，$c\neq 0$，

(1)試證：直線 $ax+by+c=0$ 與圓 $x^2+y^2=1$ 交於相異兩點 P，Q。

(2)求弦 $\overline{PQ}$ 的長。

【解答】(1)見詳解　(2) 1

【詳解】



(1)圓 $x^2+y^2=1$ 的中心 O 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離 $d=\frac{|a\times 0+b\times 0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ……①

由條件 $3(a^2+b^2)=4c^2$ 得 $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}|c|$ ……②

②代入①，$d=\frac{\sqrt{3}|c|}{2|c|}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1=$ 半徑，故直線與圓交於相異兩點

(2)如上圖，弦 $\overline{PQ}$ 的中點 M，直角三角形 OMP 中

$\overline{PM}^2=\overline{OP}^2-\overline{OM}^2=1-d^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\quad\therefore\quad\overline{PM}=\frac{1}{2}$，故 $\overline{PQ}=2\overline{PM}=1$