106 年新竹高中

一、填充題

1. $a^{\log_3 7}=27$, $b^{\log_7 11}=49$, $c^{\log_{11} 25}=\sqrt{11}$，求$a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11} 25)^2}$ 。

2. 求$(t-2)^2+(s-3)^2+(3t+5s-7)^2$的最小值。

3. 在小於等於10^n的正整數中任取一數，其各位數字至少出現一個 9 的機率為P_n，求$\lim\limits_{n\to\infty} P_n=$？

4. 實數$p,q,r\ge 0$，且$p+q+r=1$，已知$x=p+3q+4r$，$y=2p+q+3r$，求點(x,y)所圍成的圖形面積。

5. 全班 50 人，喜歡國文的有 30 人，喜歡英文的有 35 人，喜歡數學的有 40 人，試問三科皆喜歡的至少有多少人？

6. 求滿足如下條件的$(1,2,3,......,12)$的排列$(a_1,a_2,a_3,...,a_{12})$的個數：
 $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$, $a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}<a_{11}<a_{12}$ 。

7. $\sum\limits_{0}^{100}(20k+17)\cdot C_k^{100}(0.3)^k(0.7)^{100-k}=$

8. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_{(3+h)^2}^{9}\dfrac{1}{1+x^4}dx=$

二、計算證明題

1. P 為邊長 2 的正四面體 O-ABC 表面上的點，求所有滿足∠APB≧90°的 P 點形成之面積。

2. 實係數多項式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+c+1}{x^3-1}=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-k}{x^3-1}=0$，求$(a,b,c,k)$。

3. 試證：$log_{(n-1)}n>log_n(n+1)$, $n>2$, $n\in N$。

4. △ABC 中，$\overline{AB}=20$，M 為$\overline{AB}$中點，△ABC 的內切圓三等分$\overline{CM}$，求△ABC 面積。

5. $z_1,z_2,...,z_8$為$z^8=-4+5i$的 8 個根，$A(1+i)$，$P_k(z_k)$：
 (1) 求$\overline{AP_1}\cdot\overline{AP_2}\cdot\overline{AP_3}\cdot\overline{AP_4}\cdot\overline{AP_5}\cdot\overline{AP_6}\cdot\overline{AP_7}\cdot\overline{AP_8}=$？
 (2) 求$\sum\limits_{1}^{8}{z_k}^7=$？

6. $a_1=3$, $\forall n\in N$, $a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{4}{{a_n}^2}$。
 (1) 試證$\langle a_n \rangle$收斂。
 (2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。