100 學年度文華高中師甄試數學科試題

2.試求 $\int_0^2 x^2(1-x)^{23}dx=$______。【100.文華高中　★★☆】

【解】:

令 $(1-x)=t \Rightarrow -dx=dt$ ，則

$$\int_0^2 x^2(1-x)^{23}dx=\int_1^{-1}(1-t)^2\cdot t^{23}\cdot(-1)dt=\int_{-1}^{1}t^{23}-2t^{24}+t^{25}dt=\frac{-4}{25}$$

7.曲線 $\Gamma:3x^2+6xy+7y^2-12=0$ 上一點 $P(h,k)$，則 h^2+k^2 最小值為______。【100.文華高中　★☆☆】

【解】:

將此曲線旋轉 θ ，則 $\cot 2\theta=\frac{3-7}{6}=\frac{-2}{3}$ ，則旋轉的的方程式為 $ax'^2+by'^2-12=0$

其中 $\begin{cases}a'+c'=3+7=10\\ a'-c'=\sqrt{6^2+(3-7)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\end{cases}\Rightarrow a'=5+\sqrt{13},c'=5-\sqrt{13}$

旋轉後的方程式為 $\frac{x'^2}{\frac{12}{5+\sqrt{13}}}+\frac{x'^2}{\frac{12}{5-\sqrt{13}}}=1$

又 h^2+k^2 可表為原點到曲線上的最知距離的平方，而原點到橢圓的最短距離平方為到短軸頂點的距離，亦即 $b^2=\frac{12}{5+\sqrt{13}}=5-\sqrt{13}$

8.設 P 為 $\Gamma:x^2+6xy+y^2+10x-2y+1=0$ 上任一點，F 與 F' 是 Γ 的兩個焦點，$|\overline{PF'}-\overline{PF}|=$___【100.文華高中　★☆☆】

【解】:

先將此 Γ 的方程式做平移 (h,k) 及旋轉 θ，變成標準式再進行討論，$|\overline{PF'}-\overline{PF}|=2a$

由 $\begin{cases}2h+6k+10=0\\ 6h+2k-2=0\end{cases}\Rightarrow(h,k)=(1,-2)$ ，將 Γ 平移 $(h,k)=(1,-2)$

得新的方程式 $\Gamma':x'^2+6x'y'+y'^2+8=0$

再將 Γ' 旋轉 θ，由 $\begin{cases}a'+c'=2\\ a'-c'=6\end{cases}\Rightarrow a'=4,c'=-2$

得新的方程式為 $\Gamma'':4x''^2-2y''^2+8=0\Rightarrow\Gamma'':-\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{4}=1$

得 $2a=4$ ，所以 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|=4$

9.若 $k=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{120}}$ ，求 $[k]=$____。【100.文華高中　★★☆左營高中有類似題】

【解】：

$\because 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$ ，當 $n>1$

$\therefore\quad 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1}$ ，

$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

……

$2\sqrt{121}-2\sqrt{120}<\dfrac{1}{\sqrt{120}}<2\sqrt{120}-2\sqrt{119}$

將上列式相加

$2\sqrt{121}-2\sqrt{2}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{120}}<2\sqrt{120}-2$

$\Rightarrow 2\sqrt{121}-2\sqrt{2}+1<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{121}-1$

$\Rightarrow 23-2\sqrt{2}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<21$

所以 $[k]=20$

12.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+3^5+\ldots+(2n-1)^5}{n^6}=$______。【100.文華高中　★☆☆】

【解】：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+3^5+\ldots+(2n-1)^5}{n^6}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}[(\frac{1}{n})^5+(\frac{3}{n})^5+\ldots+(\frac{2n-1}{n})^5]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}[(\frac{2}{n})^5+(\frac{4}{n})^5+\ldots+(\frac{2n}{n})^5]=\frac{1}{2}\int_0^2 x^5dx=\frac{1}{12}x^6\Big|_0^2=\frac{16}{3}$$