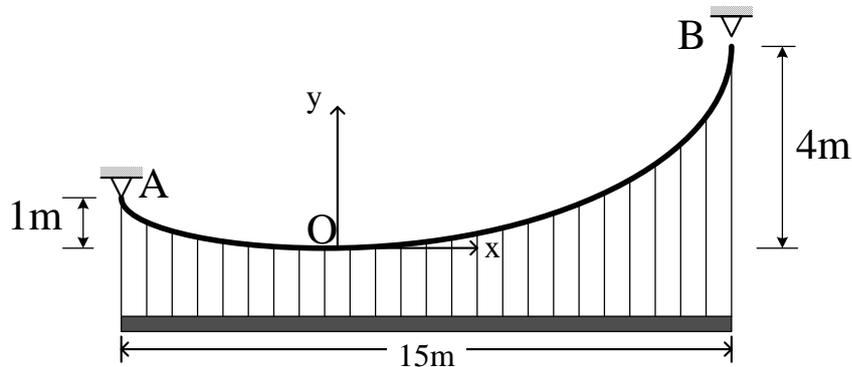
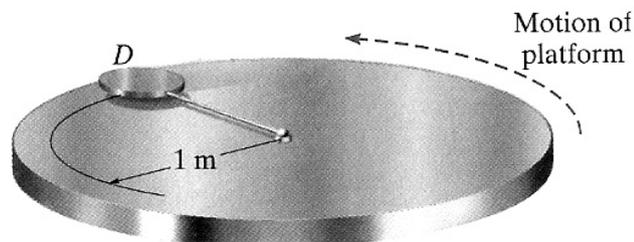


## 數學自然參考範例

- 1.(5分)一條主鋼索AOB藉由許多小鋼索吊住一塊等厚度之橋版，若該橋版延水平向( $x$ 向)每公尺之重量為 $w$ ，則主鋼索之線形可證明為一拋物線且方程式為： $y = \frac{wx^2}{2H}$ ，其中座標軸原點 $O$ 需取為該主鋼索之最低點，又此處主鋼索之張(拉)力為 $H$ 且方向為水平。若已知A點之高程( $y$ 座標)為1m，B點之高程( $y$ 座標)為4m且 $H = 1000$  kN。以下何二者為對？
- (A)  $w = 125$  kN/m  
 (B)  $w = 80$  kN/m  
 (C) B點  $x$  座標為 8m  
 (D) A 處主鋼索張力比 B 處大  
 (E) A 處主鋼索張力大於 1000kN 但小於 1100 kN



- 2.(5分)先將一個質量為 3kg 之小圓盤用一繩子綁於一個大圓盤的中心，然後快速轉動大圓盤(令此時間 $t=0$ )，假設繩子所能承受的最大張力為 300N，兩圓盤間之動摩擦係數為 0.1，重力加速度 $g=10\text{m/s}^2$ 。下列何二者為錯？
- (A) 小圓盤的速度與時間成正比。  
 (B) 小圓盤的速度達 10m/s 時繩子即將被拉斷。  
 (C) 小圓盤的速度達 5m/s 時所需的時間小於 4s。  
 (D) 時間  $t=8\text{s}$  時，繩子尚未被拉斷。  
 (E) 若動摩擦係數變為 0.2，則繩子被拉斷所需的時間變為一半。



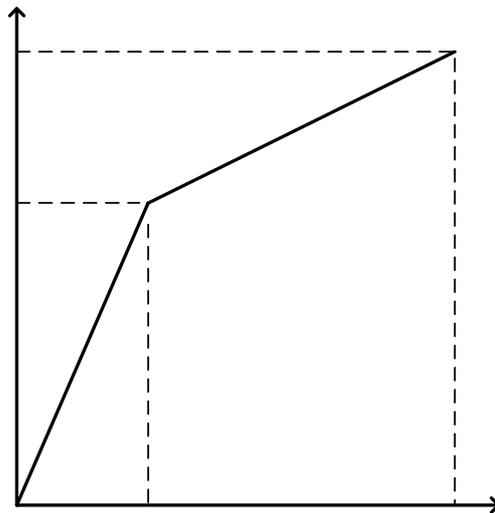
- 3.(5分)一顆質量 0.01kg 之子彈垂直射入水中，已知入水瞬間速度為 16m/s，由於受到水的阻力，子彈速度會慢慢減小。今假設兩種阻力(方向向上)形式，第一種阻力形式為  $F_D = V$ ，第二種阻力形式為  $F_D = a\sqrt{V}$ ，以上  $V$  為

子彈的速度， $a$ 為一個係數。由於子彈的重量比起阻力小甚多，可不考慮受到的重力。以下何二者為對？ [註： $\ln 2=0.693$ ]

- (A)考慮第一種阻力形式時，子彈速度減為  $8\text{m/s}$  所需的時間是  $0.00693\text{s}$
- (B)考慮第一種阻力形式時，子彈速度減為  $4\text{m/s}$  所需的時間是  $0.0277\text{s}$
- (C)若考慮第一種、第二種阻力形式時，子彈速度減為  $4\text{m/s}$  的時間相同，則  $a$  小於  $2.164$
- (D)若考慮第一種、第二種阻力形式時，子彈速度減為  $1\text{m/s}$  所需的時間相同，則  $a=2.164$
- (E)若將重力考慮進來，速度減為某一定值時所需之時間將變短

4.(5分)電子產品為避免運送過程中受到損壞，經常以緩衝包材(如聚乙稀)做適當裁切包覆，再以紙箱裝起來。業界為測試包材設計是否恰當，常會做所謂的落下測試(drop test)，即將包裝好的電子產品自某一個高度自由落體掉下，然後量測產品撞到地面後所受到的最大加速度，若該最大加速度大於某一上限則不合格，要再重新做包材設計，直到合格為止。今考慮一台筆記型電腦，質量為  $1.8\text{kg}$ ，包裝好後自  $1\text{m}$  高處自由落體掉下，若包材受力與壓縮量之關係如圖示。假設筆記型電腦和紙箱因變形所吸收的能量比起包材小很多，可以不計，另外假設重力加速度  $g=10\text{m/s}^2$ 。以下何二者為錯？

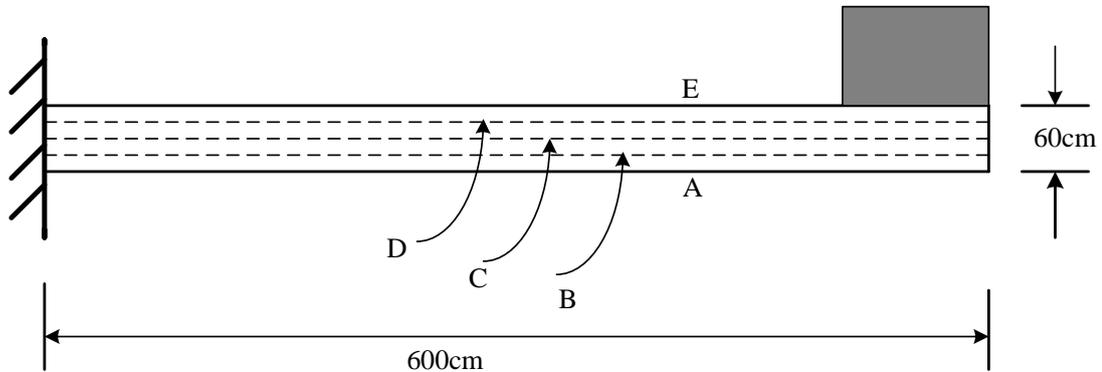
- (A)包材最大壓縮量大於  $0.025\text{m}$
- (B)包材最大壓縮量小於  $0.03\text{m}$
- (C)筆記型電腦的最大加速度介於  $450\text{g}$  和  $480\text{g}$  之間。
- (D)筆記型電腦的最大加速度介於  $480\text{g}$  和  $520\text{g}$  之間
- (E)若將筆記型電腦和紙箱因變形所吸收的能量考慮進來，則最大加速度會變小。



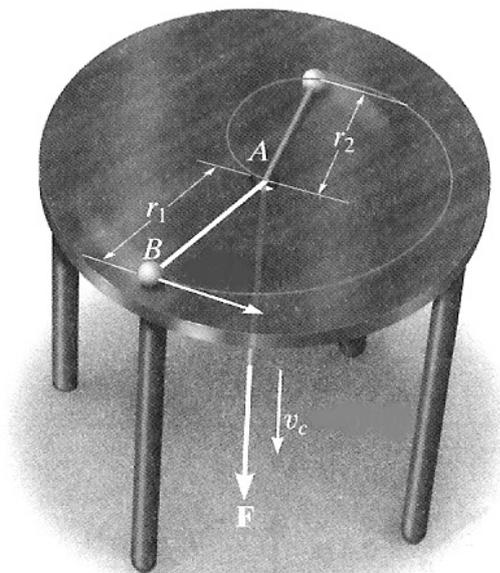
5.(5分)考慮一根圖示懸臂梁，梁深  $60\text{cm}$ ，梁寬  $40\text{cm}$ (垂直紙面)，梁長  $600\text{cm}$ ，今在梁上延梁長畫五道線(A線~E線)，分別是在高程  $y=0$ (梁底)、 $y=15\text{cm}$ 、 $y=30\text{cm}$ 、 $y=45\text{cm}$ 及  $y=60\text{cm}$ (梁頂)。畫完線後在最右端放重物，使梁彎曲變形。以下何二者為對？

- (A)A 線長度維持  $600\text{cm}$  不變。

- (B) C 線長度維持 600cm 不變。  
 (C) D 線變短。  
 (D) D 線長度變化量是 E 線長度變化量的一半。  
 (E) 若有兩根如上描述的梁，但是兩根梁的材料不同，則 A 線~E 線長度變化量與梁的材料無關。



- 6.(5 分) 一個小圓球質量 1kg，由一條穿過桌子中央圓洞的繩子拉住，時間  $t=0$  時(B 位置， $r_1=2\text{m}$ )，給予小圓球一個垂直繩子方向的初速度  $V_B=1\text{m/s}$ ，同時以等速度  $V_c=3\text{m/s}$  將繩子往下拉(繩子受到外力  $F$ )，若不計任何摩擦，則當小圓球運動到  $r_2$  時，以下何二者為對？
- (A)  $r_2=0.8\text{m}$  時小圓球的速度為  $2.5\text{m/s}$ 。  
 (B) 由  $r_1=2\text{m}$  到  $r_2=0.8\text{m}$ ， $F$  做的功為 7.125 焦爾。  
 (C)  $r_2=0.5\text{m}$  時小圓球的速度為  $4\text{m/s}$ 。  
 (D) 繩子在  $r_2=0.5\text{m}$  的速度方向仍然是垂直繩子  
 (E) 由  $r_1=2\text{m}$  到  $r_2=0.5\text{m}$ ， $F$  做的功為 12 焦爾。



- 7.(5 分) 點  $P(x_0, y_0)$  於雙曲線  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  上， $F'(-c, 0)$ 、 $F(c, 0)$  為其兩焦點， $m_{PF'}$ 、 $m_{PF}$  為兩焦半徑  $PF'$ 、 $PF$  之斜率， $m_{PT}$ 、 $m_{PN}$  分別為 P 點切線  $PT$ 、法線  $PN$  之斜率， $\alpha$ 、 $\beta$  分為  $PF'$ 、 $PF$  與  $PT$  之交角。下列敘述中，何者為正確？(應選二項)

$$(A) c^2 = a^2 + b^2, m_{PT} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}, \tan \alpha = \frac{c^2}{b y_0}, m_{PF} = \frac{y_0}{x_0 + c}$$

$$(B) m_{PF'} = \frac{y_0}{x_0 - c}, m_{PN} = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}, \tan \beta = \frac{a^2}{b y_0}, c^2 = a^2 + b^2$$

$$(C) c^2 = a^2 + b^2, m_{PN} = -\frac{a_2 y_0}{b^2 x_0}, \tan \alpha = \frac{b^2}{c y_0}, m_{PF'} = \frac{y_0}{x_0 + c}$$

$$(D) m_{PF} = \frac{y_0}{x - c}, m_{PT} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \tan \beta = \frac{c^2}{b y_0}, c^2 = a^2 + b^2$$

$$(E) c^2 = a^2 + b^2, m_{PN} = -\frac{a_2 y_0}{b^2 x_0}, \tan \alpha + \tan \beta = \frac{2b^2}{c y_0}, m_{PF'} = \frac{y_0}{x_0 + c}$$

8.(5分)設計易開罐容器，容量須為  $1000 \text{ cm}^3$ ，底圓半徑  $r$ ，高度  $h$ ，其金屬表面積  $A$  須為最小。下列敘述中，何者正確？（應選二項）

$$(A) r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}, A = 300\sqrt[3]{\pi} \text{ cm}^2, h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}$$

$$(B) r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}, A = 300\sqrt[3]{\pi} \text{ cm}^2, h = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}$$

$$(C) r = 5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ cm}, A = 200\sqrt[3]{16\pi} \text{ cm}^2, h = 5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ cm}$$

$$(D) r = 5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ cm}, A = 150\sqrt[3]{16\pi} \text{ cm}^2, h = 10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ cm}$$

$$(E) r = 5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ cm}, A < 200\sqrt[3]{16\pi} \text{ cm}^2, h > r$$

9.(5分)二平面  $T$  和  $S$  均穿過點  $(2,1,4)$ ，其法向量各為  $(1,1,2)$  和  $(1,0,1)$ ，令  $\theta$  為該二平面之交角， $L$  為其交線。下列敘述中，何者正確？（應選二項）

$$(A) T: x + y + 2z = 11 \quad S: x + z = 6, \theta = 15^\circ, L: x = 1 + t, y = t, z = 5 - t$$

$$(B) T: x + y + 2z = 11 \quad S: x + z = 6, \theta = 30^\circ, L: x = t, y = -1 + t, z = 6 - t$$

$$(C) T: x + y + 2z = 11 \quad S: x + z = 6, \theta = 45^\circ, L: x = 1 + t, y = t, z = 5 - t$$

$$(D) T: x + y + 2z = 11 \quad S: x + z = 6, \theta = 30^\circ, L \parallel (1,1,-1)$$

$$(E) T: x + y + 2z = 11 \quad S: x + z = 6, \theta = 15^\circ, L \parallel (1,1,-1)$$

10.(5分)下列有關內接於圓  $x^2 + y^2 = a^2$  之長方形敘述中，若邊長平行於座標軸時，何者正確？（應選二項）

$$(A) \text{最大面積為長方形，其邊長為 } \frac{3}{2}a, \text{ 及 } \frac{\sqrt{7}}{2}a, \text{ 最大面積為 } \frac{3\sqrt{7}}{4}a^2$$

$$(B) \text{最大面積為正方形，在第一象限內之頂點坐標為 } (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

最大面積為  $2a^2$

- (C) 最大面積為長方形，其邊長為  $\frac{9}{5}a$ ，及  $\frac{\sqrt{19}}{5}a$ ，最大面積為  $\frac{9\sqrt{19}}{25}a^2$
- (D) 最大面積為正方形，其邊長為  $2\sqrt{2}a$ ，最大面積為  $8a^2$
- (E) 最大面積為正方形，其邊長為  $\sqrt{2}a$ ，最大面積為  $2a^2$

11.(5分) 解聯立方程式  $x_1 - x_2 - x_4 = 0$  與  $x_1 - x_3 - x_4 = 0$  時，下列敘述中，何者正確？（應選二項）

- (A) 解集空間非為點，而為直線（1 維空間）
- (B) 解集空間非為直線，而為平面（2 維空間）
- (C) 解集空間非為平面，而為立體（3 維空間）
- (D) 解集空間為點，而非為 1~3 維空間
- (E) 解集空間可有 2 個互為獨立之向量，作為編織解集空間之向量基

12.(5分) 直角座標系  $xy$  由原點  $O$  平移至  $O'(h, k)$  後再逆時針旋轉  $\theta$  角成  $x'y'$

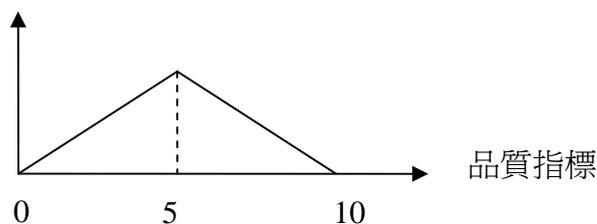
座標系，有關點舊座標  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  與新座標  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  之關係，下列敘述中，何

者正確？（應選二項）

- (A)  $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}' + \mathbf{b}$
- (B)  $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- (C)  $\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})$
- (D)  $\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- (E)  $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{b}$

上式中： $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

13.(4分) 某一產品的優劣可以用一個 0 至 10 的品質指標來表之。假設此指標為一個隨機變數，而其出現的相對頻率（縱軸）如下圖所示：



若隨機抽樣取 3 個此產品的樣本 (sample)，則其較有可能的品質指標為（選兩組）：

- (A) 3, 6, 8
- (B) 4, 5, 7
- (C) 3, 4, 9
- (D) 2, 6, 7
- (E) 3, 6, 6