

【第一冊】

1. 數系 ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$)

$$\Rightarrow \text{實數}(\mathbf{R}) \begin{cases} \text{有理數 } \mathbf{Q} \begin{cases} \text{整數 } \mathbf{Z} : (\text{正整數 } \mathbf{N}, \text{ 零, 負整數}) \\ \text{分數} : (\text{有限小數, 循環小數}) \end{cases} \\ \text{無理數 } \mathbf{Q}^c : (\text{不循環的無限小數}) \end{cases}$$

2. 算幾不等式： $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

【例】若 $3a+2b=12$ ，求 ab^2 的最大值 = $\frac{64}{3}$

3. 乘法公式

(1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(2) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = \frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{3}$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$x^4-1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$x^5-1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

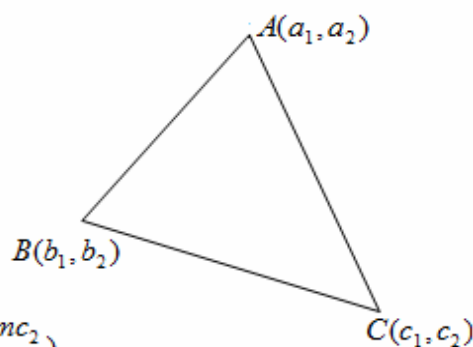
4. 基本公式：

(1) $\overline{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

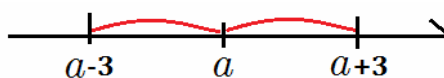
(2) $\triangle ABC$ 重心 $G(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3})$

(3) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}$

(4) 若 $\overline{AP} : \overline{PC} = m : n$ ，則 $P(\frac{na_1+mc_1}{m+n}, \frac{na_2+mc_2}{m+n})$



5. 絕對值： $|x-a| < 3 \Leftrightarrow (a-3) < x < (a+3)$



6. (1) 斜率 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

【例】若 $3x+2y-12=0$ 的斜率 = $-\frac{3}{2}$

(2) 點斜式：過 $P(x_0, y_0)$ ，斜率為 m 之直線 $L: y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

(3) 截距式：x 軸截距 a ，y 軸截距 b 之直線 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

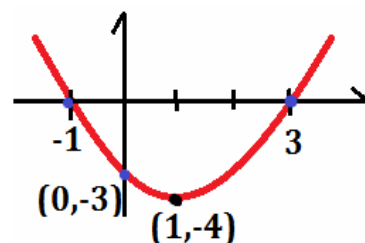
(4) 直線 $L: ax+by+c=0$ ，(1)若 $L_1 // L$ ，設 $L_1: ax+by+k=0$ (2)若 $L_2 \perp L$ ，設 $L_2: bx-ay+k=0$

7. 二次函數：

例： $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

(1) 與 x 軸交點： $(-1, 0), (3, 0)$

(2) 與 y 軸交點： $(0, -3)$



8. (1) 餘式定理： $f(x)$ 除以 $(x-c)$ 的餘式 $r = f(c)$

(2) 因式定理：若 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $f(c) = 0$

【例】 $12^5 - 7 \cdot 12^4 - 58 \cdot 12^3 + 16 \cdot 12^2 - 465 \cdot 12 + 100 = \underline{280}$

【例】 $f(x) = x^{59} + 7x^{22} - 4x^8 + 5$ 除以 $x-1$ 的餘式 = 9

9. 牛頓定理：若整係數 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 40 = 0$ 有四個相異正整數根，求此四根。 Ans: 1, 2, 4, 5

10. 根與係數：若 $ax^2 + bx + c = 0$ 之兩根 α, β

補 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 之三根 α, β, γ

$$\text{則} \begin{cases} \text{兩根和: } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \text{兩根積: } \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{則} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

【例】若 α, β 是 $x^2 + 6x + 2 = 0$ 的兩根，求 (1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ (3) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$

Ans: (1) 32 (2) -180 (3) $-6 - 2\sqrt{2}$

11. 勘根定理：說明 $x^3 - 9x - 10 = 0$ 在 3, 4 之間有實根

答：因為 $f(3) \cdot f(4) < 0$

12. 不等式：(1) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ 答： $x \geq 3, x \leq 1$ (2) $x(x-1)(x-3)(x-5) > 0$ 答： $x < 0, 1 < x < 3, x > 5$

(大分)

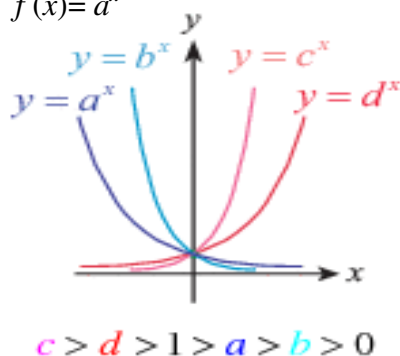
(小連)

13. (1) 負指數： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (2) 分數指數：設 $a > 0$ ，則 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

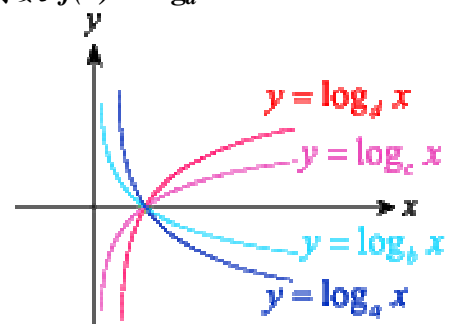
【例】設 $a > 0$ ， $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2$ ，求 $a + a^{-1} = \underline{6}$

【例】 $0 \leq x \leq 2$ ，求 $f(x) = -9^x + 2 \times 3^{x+1} + 3$ 的最大值與最小值。 Ans: 最大值 12，最小值 -24

14. 圖型：(1) 指數 $f(x) = a^x$



(2) 對數 $f(x) = \log_a x$



4. (1)階乘： $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

(2)排列： $P_3^6 = 6 \times 5 \times 4$

(3)選取： $C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!}$

【例】甲、乙、丙、丁、戊，共五人排成一列，求下列方法數

(1)甲、乙、丙相鄰 (2)甲、乙不相鄰 (3)甲在乙前方，且乙在丙前方

Ans:(1)36 (2)72 (3)20

解：(1)3!·3!

(2)3!·[4·3]

(3)5·4 (丁戊選位就坐)

5. 重複組合：袋中有白、紅、藍球，取5個，共有 $H_5^{3種} = C_5^{5+3-1}$ 種方法。

【例】有5種不同的酒，倒入3個酒杯，求下列方法數：

(1)杯子不同，每種酒不限倒一次： 5^3

(2)杯子不同，每種酒最多倒一次： P_3^5

(3)杯子相同，每種酒不限倒一次： H_3^5

(4)杯子相同，每種酒最多倒一次： C_3^5

(5)杯子不同，每種酒不限倒一次，且至少一杯為啤酒： $5^3 - 4^3$ (沒啤酒)

Ans: (1)125 (2)60 (3)35 (4)10 (5)61

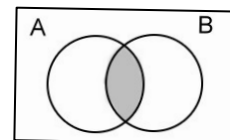
6. 二項式： $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$

(1) $(x+1)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1$

(2) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$ ※ $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots = \frac{2^n}{2}$

【例】 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{10}$ 的展開式中， x^2 的係數為 165

7. 條件機率：在發生 A 事件下，B 發生的機率 = $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

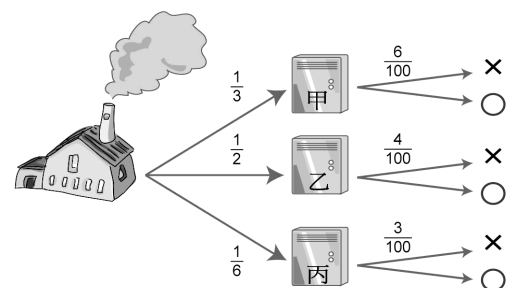


8. 貝式定理：【例】工廠有甲，乙，丙三機器，

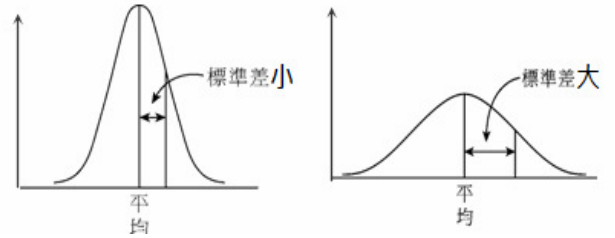
產量占總產量的 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ 。已知產品中甲有 6%，

乙有 4%，丙有 3% 為不良品。今任選一產品，已知

該產品為不良品，則此產品為甲機器所生產的機率為 $\frac{4}{9}$



9. 標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}}$



★性質：若 $y_i = ax_i + b$ ，則(1) $\bar{y} = a\bar{x} + b$ (2) $\sigma_y = |a| \cdot \sigma_x$

10. 標準分數 $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ (例如 $Z=1.5$ 代表你分數比"平均"多 1.5 個標準差)

11. 相關係數 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$ ※(1) $-1 \leq r \leq 1$ (2) $|r|$ 越大，相關程度越大

12. 迴歸直線 $L: y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \cdot (x - \bar{x})$ ※(1) 直線 L 過 (\bar{x}, \bar{y}) (2) 斜率 $m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

【例】研究紙張的張力強度 Y (磅/平方英吋) 和所含硬木比例 X (百分比) 關係的實驗，得到如下 5 組數據：

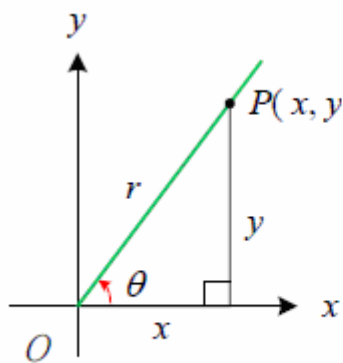
求(1) 相關係數 (2) Y 對 X 的迴歸直線方程式

Ans: (1) 0.725 (2) $y - 30 = \frac{290}{100}(x - 8)$

X	3	4	7	11	15
Y	5	40	15	35	55

【第三冊】

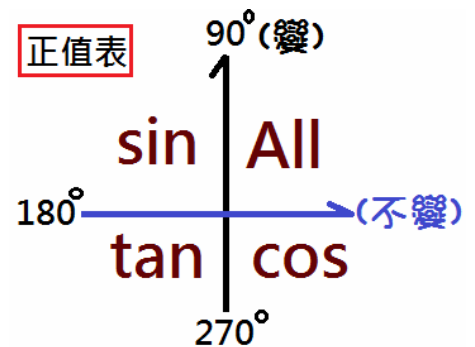
1. 三角函數：



$$\sin \theta = \frac{\text{對}}{\text{斜}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{鄰}}{\text{斜}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{對}}{\text{鄰}} = \frac{y}{x} \text{ (斜率)}$$



2. (1) π (弧度) = 180° (2) 1 (弧度) $\doteq 57.3^\circ$

3. 平方關係： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow (\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = 1 \pm 2 \sin \theta \cos \theta$

【例】若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ， $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，求(1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\tan \theta + \cot \theta$

Ans: (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{8}{3}$

4. (1) 正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(2) 餘弦定理： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

(3) 面積 $\Delta = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【例】 ΔABC 中， $a=4$ ， $b=6$ ， $c=8$ ，求 ΔABC 的 (1)面積 (2)高 h_c (3)內切圓 r (4)外接圓 R

Ans: (1) $3\sqrt{15}$ (2) $\frac{3}{4}\sqrt{15}$ (3) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (4) $\frac{16}{15}\sqrt{15}$

5. 和角公式：(1) $\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$ (同名異號)

(2) $\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$ (異名同號)

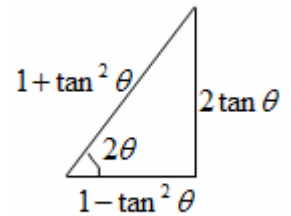
(3) $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \cdot \tan B}$

倍角：(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

(2) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

(3) $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

三倍角：(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3 \theta$ (2) $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos\theta$

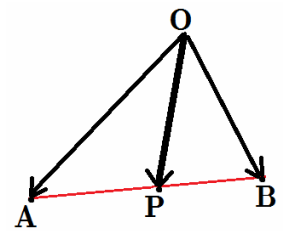


6. 圓心 (h, k) ，半徑為 $r \Rightarrow$ 圓的標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

7. 向量加減法：(1) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (2) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ (後 - 前)

8. 向量 $\vec{OP} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$ ，若 P, A, B 共線 $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

※若 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，則 $\vec{OP} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{OB}$



9. 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，則內積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

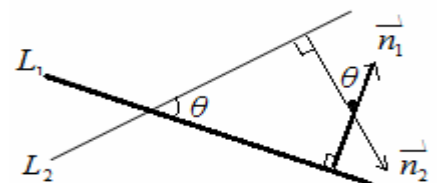
※(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

10. 柯西： $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2$

【例】設 $2x + y = 10$ ，求 $x^2 + y^2$ 的最小值，及此時 (x, y) 之值。 Ans: 20, (4, 2)

11. 法向量 \vec{n} ：直線 $3x + 4y - 7 = 0$ 之法向量 $\vec{n} = \underline{(3, 4)}$

※直線 L_1 與 L_2 的夾角 $\theta = \vec{n}_1$ 與 \vec{n}_2 的夾角 θ



12. 行列式: $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx$ 【例】若 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 6$, 求(1) $\begin{vmatrix} 4a-3b & 6b \\ 4c-3d & 6d \end{vmatrix} = \underline{144}$ (2) $\begin{vmatrix} 7a & 3b \\ 14c & 6d \end{vmatrix} = \underline{252}$

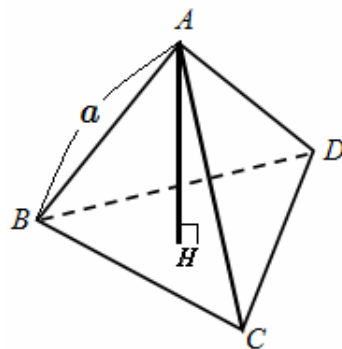
【第四冊】

1. 正四面體: (1) 兩面夾角 $\cos \theta = \frac{1}{3}$

(2) 高 $\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, $\left[r+R = \frac{1}{4}\overline{AH} + \frac{3}{4}\overline{AH} \right]$

(3) 體積 $V = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高}\overline{AH})$

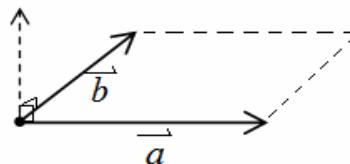
(4) 兩稜線距離 $= \frac{\sqrt{2}}{2}a$



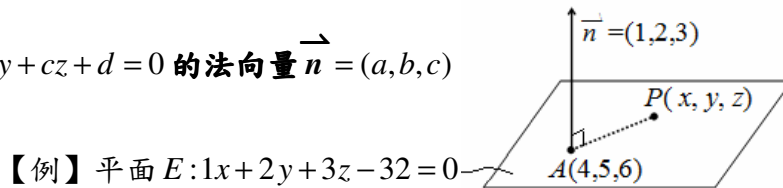
2. 設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow$ 外積 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \times a_3 & a_1 \times a_3 & a_1 \times a_2 \\ b_2 \times b_3 & b_1 \times b_3 & b_1 \times b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$... 為一向量

(I) 方向: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, 且 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

(II) 大小: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}$ 與 \vec{b} 所張口面積



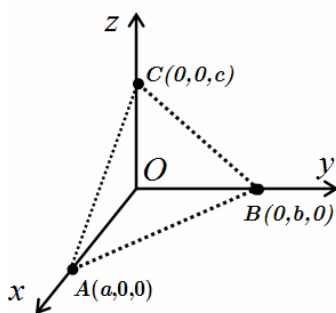
3. 空間中: 平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$



【例】平面 $E: 1x + 2y + 3z - 32 = 0$

4. 平面的截距式 $E_{ABC}: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

※ 四面體體積 $V_{OABC} = \frac{1}{6} |abc|$



5. 平面中: (1) 點 $P(X_0, Y_0)$, 直線 $L: ax + by + c = 0 \Rightarrow$ 距離 $d(P, L) = \frac{|a \cdot X_0 + b \cdot Y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

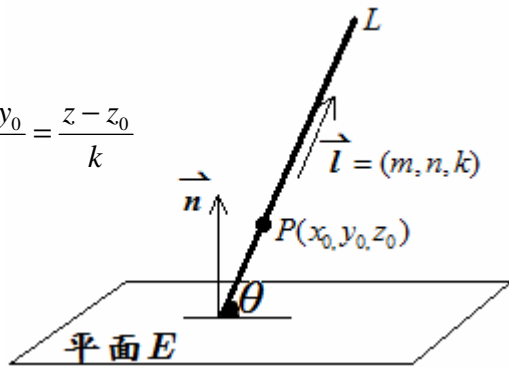
(2) 兩平行線 $\begin{cases} L_1: ax + by + c_1 = 0 \\ L_2: ax + by + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 距離 $d(L_1, L_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

6. 空間中: (1) 點 $P(X_0, Y_0, Z_0)$, 平面 $E: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow$ 距離 $d(P, E) = \frac{|a \cdot X_0 + b \cdot Y_0 + c \cdot Z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

(2) 兩平行面 $\begin{cases} E_1: ax + by + cz + d_1 = 0 \\ E_2: ax + by + cz + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 距離 $d(E_1, E_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

7. 空間中的直線：找(1)點 $P(x_0, y_0, z_0)$ (2)方向向量 $\vec{l} = (m, n, k)$

⇒直線 L 參數式：
$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + k \cdot t \end{cases}$$
 或 L 比例式：
$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{k}$$



※直線 L 與平面 E 夾角 $\theta = 90^\circ - (\vec{l}$ 與 \vec{n} 夾角)

8. 對角線矩陣 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

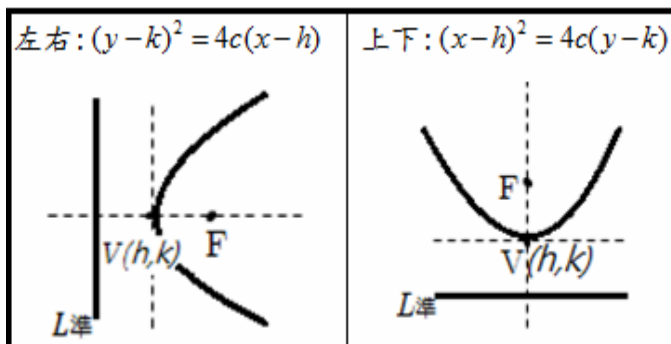
9. 若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 有反矩陣 A^{-1} ，則 $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ⇒反矩陣 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

10. 若 $M = \begin{bmatrix} A & X \\ B & Y \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣，則(1) $0 \leq A, B, X, Y \leq 1$ (2) $A+B=1$ 且 $X+Y=1$

11. 拋物線：焦點 $F(x_0, y_0)$ ，準線 $L: ax+by+c=0$

⇒ 拋物線上的點 $P(x, y)$ 滿足 $\overline{PF} = d(P, L)$

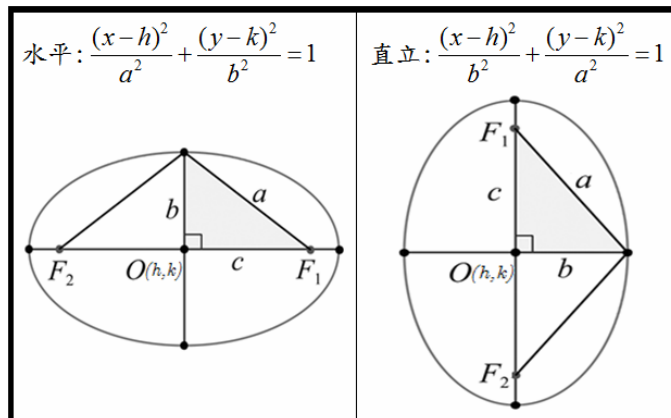
(1) 焦距 $= \overline{VF} = |c|$ (2) 正焦弦長 $= 4 \cdot |c|$



12. 橢圓：長軸 $2a$ ，短軸 $2b$ ，兩焦點距離 $\overline{F_1F_2} = 2c$

⇒ 橢圓上的點 $P(x, y)$ 滿足 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

(1) $a^2 = b^2 + c^2$ (2) 正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$



13. 雙曲線：貫軸 $2a$ ，共軛軸 $2b$ ，焦點距離 $\overline{F_1F_2} = 2c$

⇒ 雙曲線上的點 $P(x, y)$ 滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$

(1) $c^2 = a^2 + b^2$ (2) 正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$

14. 漸近線 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ ， $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

的雙曲線： $(a_1x+b_1y+c_1) \cdot (a_2x+b_2y+c_2) = k$

