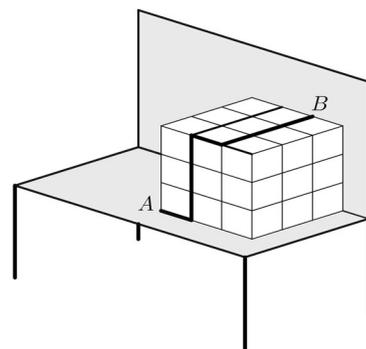


## 臺北區 105 學年度 學測聯合模擬考 第二次

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

一、單選題（佔 25 分）

1. 右圖是一顆  $3 \times 3$  的魔術方塊，也就是在一個正立方體中，每一面均有九個大小相等的正方形。現將其中一面緊靠在牆面，並靜置在桌面上(如圖所示)，試求一隻螞蟻沿著分格線或稜線，從  $A$  點走捷徑到  $B$  點，有幾種不同的走法？(舉例說明：圖中粗線即為滿足條件之一條路徑。)



- (1) 28 種    (2) 56 種    (3) 74 種    (4) 110 種    (5) 138 種

2. 若  $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-2y+1)^2$ ，試求此函數的最小值為下列何者？

- (1)  $\frac{10}{3}$     (2)  $\frac{8}{3}$     (3) 1    (4) 2    (5) 3

3. 坐標平面上有一個正六邊形，其頂點以順時針方向依序為  $ABCDEF$ 。已知  $F$  點的坐標為  $(0, 5)$ ，

$O$  點為原點，且  $A$ 、 $B$  皆在  $x$  軸上，則  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AO} = ?$

- (1) 5    (2)  $5\sqrt{3}$     (3)  $\frac{25}{3}$     (4)  $\frac{25}{3}\sqrt{3}$     (5) 25

4. 已知一圓  $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ ，平面上一點  $A(4, 2)$ ，直線  $L$  通過  $A$  點且與  $x$  軸正向的交角為  $60^\circ$ ，若直線  $L$  與圓  $C$  交於  $P$ 、 $Q$  兩點，求  $\overline{AP} \times \overline{AQ} = ?$

- (1)  $\frac{1}{4}$     (2)  $\frac{1}{2}$     (3) 1    (4)  $\frac{3}{2}$     (5)  $\frac{5}{4}$

5. 考慮矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數且行列式值  $\det(A) = \frac{1}{2}$ ，求  $\det(A - A^{-1}) = ?$

- (1)  $\frac{1}{8}$     (2)  $\frac{1}{4}$     (3)  $\frac{1}{2}$     (4)  $\frac{9}{2}$     (5)  $\frac{9}{4}$

二、多選題（佔 40 分）

6. 設  $f(x)$  為一實係數四次多項式， $i = \sqrt{-1}$ ，已知  $f(i+1) = 0$  且不等式  $f(x) < 0$  的解為  $-2 < x < 3$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1)  $f(i-1) = 0$                       (2) 若  $a$ 、 $b$  為任意實數，且  $f(a+bi) = 2$ ，則  $f(a-bi) = -2$

- (3) 不等式  $f(2x) > 0$  的解為  $x < -1$  或  $x > \frac{3}{2}$                       (4)  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸交於相異兩點

- (5)  $y = (x+2)f(x)$  的圖形與  $x$  軸有三個交點

7. 已知自然數  $a$ 、 $b$  滿足  $\log_3 a = 20$  且  $\log_3 b = 16$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) 自然數  $a+b$  必為 41 之倍數      (2) 自然數  $a$  的個位數字與  $b$  相同  
(3) 自然數  $a+b$  為 9 位正整數      (4) 自然數  $a+b$  展開後之末兩位數字為 22  
(5) 若定義實數  $A = n + \alpha$ ，其中  $n$  為整數且  $0 \leq \alpha < 1$ ，則稱  $\alpha$  為實數  $A$  之小數部分，

由此定義得  $\log_3(a^4 + b^5)$  之小數部分與  $\log_3 162$  之小數部分相等

8. 阿松申辦提款卡時，依銀行規定須自訂 4 個阿拉伯數字排成一組密碼。某天阿松欲提款時發現他忘了正確密碼，只記得是由奇數 1, 3, 5, 7, 9 中取出相異四個數字排列而成，現若依此隨機輸入號碼，試問下列選項哪些是正確的？

- (1) 他第一次就猜對的機率為  $\frac{1}{120}$   
(2) 提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時，會沒收該提款卡，阿松嘗試輸入不同密碼，則他的提款會被沒收的機率為  $\frac{39}{40}$

承上述條件，若有一種智慧型提款機，每次輸入數字後會給提示，提示的口訣為「 $mAnB$ 」，其中  $mA$  表示輸入的數字當中有  $m$  個不但中了而且數字是在正確的位置， $nB$  表示輸入的數字當中有  $n$  個中了但是數字的位置不正確。例如：密碼為 7135，若輸入 3159，則提示為「1A2B」。假使能善用提示，試問下列選項哪些是正確的？

- (3) 在第一次輸入就猜到「1A3B」的機率為  $\frac{1}{15}$   
(4) 他在第一次猜到「1A3B」的條件下，第二次猜到「4A0B」的機率為  $\frac{1}{8}$   
(5) 他在第一次猜到「1A3B」且在第二次猜到「4A0B」的機率為  $\frac{1}{120}$

9. 若變數  $X$ (身高)的算術平均數為  $\mu_x$ ，標準差為  $\sigma_x$ ；而變數  $Y$ (體重)的算術平均數為  $\mu_y$ ，標準差為  $\sigma_y$ ；且變數  $X$  與變數  $Y$  的相關係數為  $r_{xy}$ ，而  $Y$  對  $X$  的最佳迴歸直線為  $y = a + bx$ 。現將變數做線性轉換  $P = -2X + 1$ ， $Q = Y - 3$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) 變數  $P$  的算術平均數  $\mu_p = -2\mu_x + 1$       (2) 變數  $P$  的標準差  $\sigma_p = -2\sigma_x$   
(3) 變數  $P$  與變數  $Q$  的相關係數  $r_{pq} = -r_{xy}$       (4)  $Q$  對  $P$  的迴歸直線方程式必過點  $(-2\mu_x + 1, \mu_y - 3)$   
(5)  $Q$  對  $P$  的迴歸直線方程式的斜率為  $-\frac{b}{2}$

10. 若空間中向量  $\vec{a} = (1, 2, -2)$ 、 $\vec{b} = (2, m, n)$ 、 $\vec{c} = (2, -1, 0)$ ，滿足  $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$  且

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 45$ ，則下列選項哪些是正確的？

(1)  $(\vec{a} \times \vec{b}) // \vec{c}$  (2)  $\vec{a} \perp \vec{b}$  (3)  $m=4$  (4)  $n=5$  (5)  $(\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{b} = \vec{0}$

11. 已知空間中三點  $A(2,2,1)$ 、 $B(1,3,-1)$ 、 $C(1,1,-1)$ ，若在空間中與  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點等距離的所有點所形成的圖形為  $\Gamma$ ，則下列選項哪些是正確的？

(1)  $\Gamma: x-y+2z+1=0$  (2)  $\Gamma: \begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  (3)  $\Gamma$  中最接近原點的點為  $(\frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5})$

(4)  $\Gamma$  中與原點最接近的距離為  $\sqrt{\frac{21}{5}}$  (5)  $\Delta ABC$  的面積為  $\sqrt{5}$

12. 設  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為矩陣， $I$  為單位方陣。下列有關矩陣的敘述哪些是正確的？

- (1) 若  $AB=BA$ ，則矩陣  $A$ 、 $B$  皆為方陣 (2) 若  $AC=BC$ ，且  $\det(C) \neq 0$ ，則  $A=B$   
 (3) 若  $A^2=I$ ，則  $A=I$  或  $A=-I$  (4) 若  $AB=BA$ ，則  $AB^{10}=B^5AB^5=B^{10}A$   
 (5) 若  $AB$  有乘法反元素，則  $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

13. 若方程式  $(x^2+y^2-4x)(y^2-x-7)=0$  之圖形與直線  $L: mx-y+4-2m=0$  有四個相異的交點，請問符合的  $m$  值可能為下列哪些？

- (1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 2

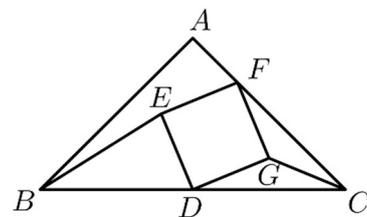
第貳部分：選填題（佔 35 分）

A. 若有一群人，任意取完 2 本相同書籍的方法數超過 1000 種，試問這一群人至少有 \_\_\_\_\_ 個人。

B. 已知  $a$  為整數，若平面上三直線  $L_1: x+2y=a+2$ ， $L_2: 2x+3y=-a-4$ ， $L_3: 3x+(-a+1)y=-1$  共交點，求序組  $(x, y, a) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

C. 已知  $\Delta ABC$  中， $\angle A=120^\circ$ ， $D$  為  $\angle A$  的內角平分線與  $\overline{BC}$  的交點， $M$  為  $\overline{BC}$  的中點，若  $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AD}=4$ ，求  $\overline{AM} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

D. 如圖所示，等腰直角  $\Delta ABC$  中， $\angle A=90^\circ$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  的中點，四邊形  $DEFG$  為正方形，且點  $F$  在  $\overline{AC}$  邊上，若  $\overline{BE} = \sqrt{3}\overline{CG}$ ， $\overline{BC}=4$ ，則正方形  $DEFG$  的面積為 \_\_\_\_\_。



E. 設圓  $C: x^2+y^2-x-y=0$  及直線  $L: x+y-4=0$ ，若  $P$  為圓  $C$  上之動點， $O$  為坐標平面上的原點，連接  $\vec{OP}$ ，且令  $\vec{OP}$  與直線  $L$  之交點為  $Q$ ，可得  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$  為定值  $k$ ，則  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

F. 滿足遞迴式  $\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$  ( $n$  為自然數) 的數列  $\langle F_n \rangle$  稱為 *Fibonacci Sequence*，若以矩陣的

方式來表現為  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ 。若  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且  $a+b+c+d = F_n$ ，試求數對  $(a, n) =$  \_\_\_\_\_。

G. 有一橢形的公園，其中心有一噴水池，距噴水池南北各  $10\sqrt{3}$  公尺處各有一涼亭，公園的邊界上任一點到兩涼亭的距離和均相等，現過涼亭闢一東西向的小徑，而小徑與公園邊界的交點處與噴水池之間鋪一直線健康按摩步道，若東西向的小徑與健康按摩步道的夾角為  $60^\circ$ ，則噴水池到公園最南端的距離為\_\_\_\_\_公尺。

## 臺北區 105 學年度 學測聯合模擬考 第二次 參考解答

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

- |      |           |          |
|------|-----------|----------|
| 1. 3 | 6. 34     | 11. 2345 |
| 2. 2 | 7. 1245   | 12. 124  |
| 3. 3 | 8. 12345  | 13. 15   |
| 4. 3 | 9. 1345   |          |
| 5. 4 | 10. 12345 |          |

第貳部分：選填題（佔 35 分）

- |              |                  |                   |
|--------------|------------------|-------------------|
| A. 45        | C. $3\sqrt{3}$   | F. (13,11)        |
| B. (1,-1,-3) | D. $4-2\sqrt{2}$ | G. $5+5\sqrt{13}$ |
|              | E. 4             |                   |

如有題目或答案打字錯誤，或後續更正，  
歡迎 email 至 [weiye@pure.pro](mailto:weiye@pure.pro) (瑋岳)提醒修改。感謝。