

臺中區國立高中 103 學年度第二次學測聯合模擬考

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 30 分）

1. 小明進行「運動健身大作戰」：每天上午、下午各運動一次，每次跑步或游泳擇一。若已知此作戰滿足以下四個條件：(a)若上午游泳則當天下午跑步、(b)共有 15 個上午跑步、(c)共有 17 個下午跑步、(d)共游泳 18 次。則小明上下午均跑步的天數有幾天？

(1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9 (5) 10

2. 浴財高中的梅涼辛廠商每天使用一種黑心油料理團膳食物。已知有 50%的機率使用飼料油、有 30%的機率使用餿水油、有 20%的機率使用銅葉綠素油。且飼料油團膳導致「腦殘症」有 20%的機率、餿水油團膳導致「腦殘症」有 30%的機率、銅葉綠素油團膳導致「腦殘症」有 40%的機率，若已知小明因食用團膳導致腦殘，則小明食用的是飼料油團膳的機率最接近下列哪個選項？

(1) 0.29 (2) 0.33 (3) 0.37 (4) 0.53 (5) 0.97

3. 已知實數 x 、 y 滿足條件 $EQ: \begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ 2x-y-3 \geq 0 \end{cases}$ ，若目標函數 $z = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 在條件 EQ 下取

到最小值 $2\sqrt{5}$ ，則 $a^2 + b^2$ 的最小值為何？

(1) 1 (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) 4 (5) 5

4. 已知 $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ ，則 $a = \frac{\log_2(2x_1+2)}{x_1}$ ， $b = \frac{\log_2(2x_2+2)}{x_2}$ ， $c = \frac{\log_2(2x_3+2)}{x_3}$ 的大小關係為何？

(1) $a < b < c$ (2) $c < b < a$ (3) $b < a < c$ (4) $c < a < b$ (5) $b < c < a$

5. 在平面直角坐標系中， O 為原點， $A(-1,0)$ ， $B(0,\sqrt{3})$ ， $C(3,0)$ ，若動點 P 滿足 $|\overrightarrow{CP}| = 1$ ，則

$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}|$ 的最大值為何？

(1) 6 (2) $\sqrt{19} + 1$ (3) $\sqrt{19} - 1$ (4) $2\sqrt{7}$ (5) $\sqrt{7} + 1$

6. 設 $m > 0$ ，已知直線 $y = m(x+2)$ 與拋物線 $\Gamma: y^2 = 8x$ 相交於 A 、 B 兩點， F 為 Γ 的焦點，若

$\overline{FA} = 2\overline{FB}$ ，則 m 值為何？

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (5) 1

二、多選題（佔 35 分）

7. 旅美棒球投手陳偉殷，根據統計，面對每一位打者投出的第一球，好球與壞球機率相等。若前一球投出好球，則下一球是好球的機率是壞球的二倍。若前一球投出壞球，則下一球是壞球的機率是好球的二倍。若好球累計滿三球則三振打者出局，若壞球累計滿四球則保送打者上壘。若打者小王子在此次打擊完全不揮棒的情況下，則下列選項哪些正確？

- (1) 陳偉殷面對打者小王子第二球投好球的機率為 $\frac{1}{2}$
- (2) 小王子被三振的機率比被保送高
- (3) 陳偉殷在第四球投出第三個好球把小王子三振的機率為 $C_2^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
- (4) 若陳偉殷第一球已投出好球，則恰用三球將小王子三振的機率為 $\frac{4}{9}$
- (5) 若陳偉殷第一球已投出壞球，則恰用四球將小王子保送的機率為 $\frac{8}{27}$

8. 若小明的 10 位同班同學的期中考數學與物理成績紀錄為 (數學, 物理) = (X, Y) 如附表，則下列選項哪些正確？

n	X	Y	$X' = \frac{(X-60)}{5}$	$Y' = \frac{(Y-60)}{5}$	X'^2	Y'^2	$X'Y'$
1	78	61	3.6	0.2	12.96	0.04	0.72
2	79	63	3.8	0.6	14.44	0.36	2.28
3	80	65	4.0	1.0	16.00	1.00	4.00
4	81	67	4.2	1.4	17.64	1.96	5.88
5	82	69	4.4	1.8	19.36	3.24	7.92
6	78	61	3.6	0.2	12.96	0.04	0.72
7	80	67	4.0	1.4	16.00	1.96	5.60
8	79	65	3.8	1.0	14.44	1.00	3.80
9	81	63	4.2	0.6	17.64	0.36	2.52
10	82	69	4.4	1.8	19.36	3.24	7.92
合計			40.0	10.0	160.80	13.20	41.36

- (1) 數學成績的算術平均 $\bar{X} = 80$
- (2) 物理成績的母體標準差 $\sigma_Y = 8$

(3) 數學成績與物理成績的相關係數 $r = 0.85$

(4) 物理 Y 對數學 X 的最適合直線為 $(y-65) = \frac{17}{10}(x-80)$

(5) 若小明的數學成績為 70 分，根據同學成績的最適合直線推估小明的物理成績為 56.5 分

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} |\log x| & , 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6 & , x > 10 \end{cases}$ ，若 $0 < a < b < c$ ，且 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) $\log a > 0$
- (2) $\log b > 1$
- (3) $\log c > \sqrt{2}$
- (4) $ab = 1$
- (5) c 不可能為正整數

10. 實係數三次多項式 $f(x) = \frac{a(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} + \frac{b(x-2)(x-1)(x+1)}{(3-2)(3-1)(3+1)} - \frac{12(x-2)(x-1)(x-3)}{(-1-2)(-1-1)(-1-3)}$

$+ \frac{8(x-2)(x+1)(x-3)}{(1-2)(1+1)(1-3)}$ ，若 $2i-1$ 為 $f(x) = 0$ 的一個解，則下列選項哪些正確？

(1) $f(i+2)=0$ (2) $f(2i+1)\neq 0$ (3) $f(x)$ 的偶數次項係數和為 -6

(4) $f(x)=0$ 有一個整數解 (5) $2a < b$

11. 從 $A_1(1,0,0)$, $A_2(2,0,0)$, $B_1(0,1,0)$, $B_2(0,2,0)$, $C_1(0,0,1)$, $C_2(0,0,2)$ 這 6 個點中隨機選取 3 個點，將這 3 個點及原點 O 兩兩相連構成一個「立體」，記該「立體」的體積為 V 。體積 V 的機率記為 $P(V)$ ，則下列選項哪些正確？

(1) V 必小於 1 (2) $P(0)=\frac{3}{5}$ (3) $P\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{20}$ (4) $P\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{1}{10}$ (5) $P\left(\frac{1}{3}\right)=P\left(\frac{2}{3}\right)$

12. 設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, \dots , $P_n(x_n, y_n)$, ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) 是橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ 上的點，點

$P_1(10,0)$ ，且 $a_1 = \overline{OP_1}^2$, $a_2 = \overline{OP_2}^2$, \dots , $a_n = \overline{OP_n}^2$ 構成一個公差為 d ($d \neq 0$) 的等差數列，其中

O 為坐標原點， F 、 F' 為橢圓 Γ 的兩焦點。記 $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ，若 $S_3 = 255$ ，則下列選項哪些正確？

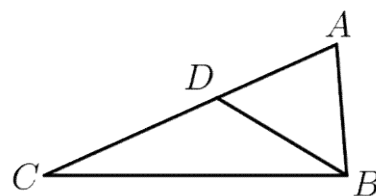
(1) $d = 15$ (2) $a_2 = 85$ (3) $S_5 = 410$ (4) $\left| \frac{x_3}{y_3} \right| = \sqrt{6}$ (5) $\Delta P_3 FF'$ 的面積為 $5\sqrt{30}$

第貳部分：選填題（佔 40 分）

A. 若直線 $L_1: y = x + a$ 和 $L_2: y = x + b$ 將單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的圓周長分成長度相等的四段弧長，則 $a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

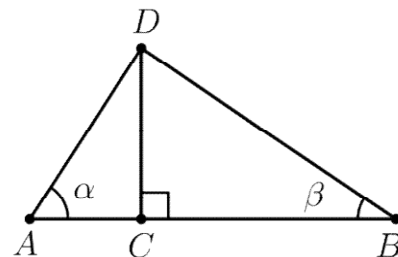
B. 在 ΔABC 中，若已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \tan A$ ，且 $\angle A = 30^\circ$ ，則 ΔABC 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

C. 如圖(1)，在 ΔABC 中， D 是 \overline{AC} 上一點，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $2\overline{AB} = \sqrt{3}\overline{BD}$ ， $\overline{BC} = 2\overline{BD}$ ，則 $\sin C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



圖(1)

D. 如圖(2)，某公司要在 A 、 B 兩地連線上的定點 C 處建造看板 \overline{CD} ，其中 D 為頂端， $\overline{AC} = 35$ ， $\overline{CB} = 80$ ，設 A 、 B 在同一水平面上，從 A 和 B 看 D 的仰角分別為 α 和 β 。 \overline{CD} 是鉛垂線段，若要求 $\alpha \geq 2\beta$ ，問 \overline{CD} 的長至多為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



圖(2)

E. 設公差為正數的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，已知 $S_3 = a_2^2$ ，且 S_1, S_2, S_4 成等比數列，則 a_{50} 為_____。

F. 什麼之塔遊戲中，黃道十二宮卡片有以下三種附屬功能：

(1) 減傷卡有 {獅子、山羊、金牛、雙魚}；

(2) 轉屬卡有 {雙子、天蠍、山羊、雙魚}；

(3) 增功卡有 {巨蟹、處子、天秤、人馬、白羊、水瓶}；

其中有二張卡 {山羊、雙魚} 兼具減傷與轉屬功能。

小名恰收集到一套 12 張完整的卡片，現欲從中挑出三張不同的卡片（無需考慮順序），且需兼具三種附屬功能，則挑選方法有_____種。

G. 在平面 $E: x+y+z=3$ 上有一圓 C ，圓心為 $P(0, -2, 5)$ ，而另一點 $Q(1, 0, 2)$ 在圓 C 上，且直線

$L: \frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-2}{1}$ 在平面 E 上和圓 C 相切於 Q 點，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

H. 時鐘的表面在一平面上，整點 $1, 2, \dots, 12$ 這 12 個數字等間隔地分布在半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓周上，

從整點 i 到整點 j 向量記為 $\overrightarrow{T_i T_j}$ ，則 $\overrightarrow{T_1 T_5} \cdot \overrightarrow{T_1 T_9} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

臺中區國立高中 103 學年度第二次學測聯合模擬考 參考解答

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

- | | | |
|------|---------|----------|
| 1. 2 | 5. 5 | 9. 4 |
| 2. 3 | 6. 4 | 10. 25 |
| 3. 4 | 7. 1245 | 11. 2345 |
| 4. 1 | 8. 134 | 12. 245 |

第貳部分：選填題（佔 40 分）

- | | | |
|------------------|-------------------------|--------------|
| A. 2 | C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ | F. 108 |
| B. $\frac{1}{6}$ | D. $20\sqrt{2}$ | G. $(-5, 4)$ |
| | E. 99 | H. 3 |

如有題目或答案打字錯誤，或後續更正，
歡迎 email 至 weiye@pure.pro (瑋岳)提醒修改。感謝。