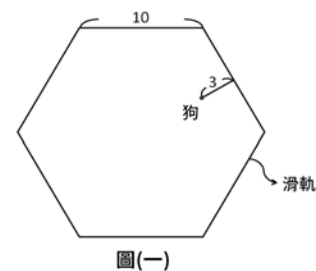


國立嘉義高中 105 學年度學術性向資賦優異【數理類】複選測驗—數學能力評量試題

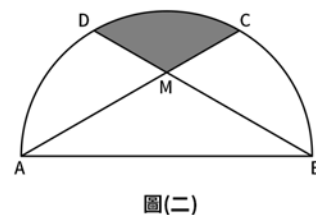
一、填充題：(85%)

1. 如圖(一)是一正六邊形的滑軌，有一條狗被繩索綁住，繩索的另一端在軌道上，此端可沿著軌道滑動。若正六邊形邊長是10公尺，而繩索的長度扣除繩結只剩3公尺，則小狗在正六邊形內部的活動面積是_____平方公尺。(即小狗可活動的範圍是在正六邊形內部離周邊3公尺內的區域。)



2. 有一數列共2016項，且知每連續五項的和均為105，若第八項是8，第十一項是11，第二十二項是22，則第2016項是_____。

3. 如圖(二)是以 \overline{AB} 為直徑的半圓， $\overline{AB} = 12$ ， C 、 D 是半圓周上的三等份點， \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 M ，則圖中陰影部分面積=_____。



4. n 是正整數，定義 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ 。試求 $1! + 2! + 3! + \dots + 2016!$ 之總和的最末兩位數字(即十位數與個位數)是_____。

5. 將1, 2, 3, ..., 9共9個數字任意填入 3×3 的方格中，每一格填一個數字，且數字不重覆。欲使每一直行和每一橫列(不含對角線)的數字和皆為奇數，如圖(三)是一種填法，則共有_____種填法。(答案要乘開。)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 6 | 8 |
| 5 | 7 | 9 |

6. 滿足 $f(-x) = f(x)$ 的函數稱為偶函數，而滿足 $f(-x) = -f(x)$ 的函數稱為奇函數。設 $f(x) = 3x^5 + 8x^3 + 7$ ，若 $f(m) = 1$ ， $f(n) = 13$ ，其中 m, n 是實數，求 $f(m+n) =$ _____。

7. 每次丟擲一個公正的骰子，當連續兩次的點數和小於7即停止丟擲，反之則繼續丟。試問從開始丟擲到停止，共丟3次的情況共有_____種。(例如第一次得3點，第二次得5點，因點數和8點，所以繼續丟，又第三次若得1點，則因第二次與第三次連續兩次的點數和是6點，比7小，所以停止丟擲，且總共丟了3次。)

8. 將邊長為6的正方形 $ABCD$ 沿對角線 \overline{AC} 折起，使得 $\overline{BD} = 6$ ，則四面體 $D-ABC$ 的體積為_____。







(註：四面體的體積 $= \frac{1}{3} \cdot$ 底面積 \cdot 高。)

9. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}$ 都是整數，且滿足 $a_1 = 0$ ， $|a_{n+1}| = |a_n + 1|$ ， $1 \leq n \leq 2015$ ， n 是正整數，則

$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2016}|$ 之最小值為_____。

10. 若 a 是整數且 $(x-a)(x-10)+1=0$ 有兩個整數根，則 $a =$ _____ (兩解)。

11. 若二次多項式 $(q-r)x^2 + (r-p)x + (p-q) = 0$ 的兩根相等，且 p, q, r 有關係式 $ap + bq + cr = 0$ ， a, b, c 是整數，則序對 $(a, b, c) =$ _____。

12. 現有 1×2 的磁磚，若欲拼成 1×2 的地板則有一種拼法()，欲拼成 2×2 的地板則有兩種拼法( )，拼成 3×2 的地板則有三種拼法(  )，則要拼成 8×2 的地板的話共有_____種拼法。

13. 若 $x = \frac{1}{\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \dots + \frac{1}{2016}}$ ，求 x 的整數部分是_____。

14. 若一實數數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ，且 $3a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n$ 對所有的 $n \geq 1$ 均成立。現令 $S = \frac{1}{a_1+3} + \frac{1}{a_2+3} + \dots + \frac{1}{a_{2016}+3}$ ，若 M 是一個整數且 $M < S < M+1$ ，則整數 $M =$ _____。

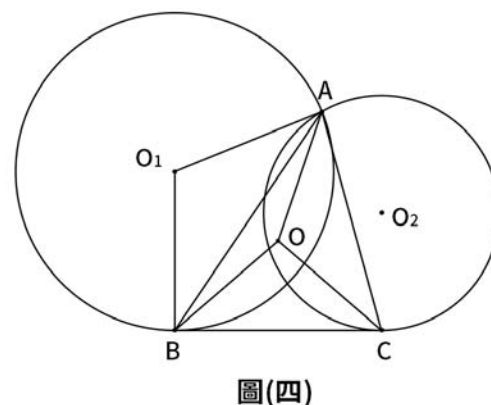
15. 若 x, y 是實數，則方程式 $\begin{cases} \frac{14}{x} + \frac{13}{y} = 4(x^2 + y^2) \\ \frac{14}{x} - \frac{13}{y} = 2(y^2 - x^2) \end{cases}$ 的解 $(x, y) =$ _____。

16. 若 a, b, c, d, e 分別是 $1 \sim 9$ 中五個相異數字，且滿足 $\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & a \end{matrix}$ ，則序對 $(a, b, c, d, e) =$ _____。

17. 若 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = x$ 此式對所有不等於 $0, 1$ 的實數 x 都成立，求 $f(x) =$ _____。

二、計算證明題：(15%)

1. 如圖(四)，兩圓 O_1, O_2 均通過 $\triangle ABC$ 的頂點 A 且圓 O_1 與 \overline{BC} 邊切於 B 點，圓 O_2 與 \overline{BC} 邊切於 C 點，且 O 點是 $\triangle ABC$ 外接圓的圓心。
- (1) 試證： $\triangle BO_1A \sim \triangle COA$ 。(5%)
- (2) 若圓 O_1 半徑是 10 ，圓 O_2 半徑是 6 ，求 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑？(4%)



2. 房間內有編號 1 到 n 的 n 盞燈以及它們的按鈕開關。每按一下按鈕，那盞燈如果原本是關著的就會打開，如果原本是打開的就會關掉。一開始每一盞燈都是關著的，現在來了 n 個人，第一個人去按了編號為 1 的倍數的所有按鈕，第二個人去按了編號為 2 的倍數 ($2, 4, 6, \dots$) 的所有按鈕，第三個人去按了編號為 3 的倍數 ($3, 6, 9, \dots$) 的所有按鈕。依此類推到第 n 個人按完之後，試推測還亮著的燈之編號有何條件並證明之。(6%)