

臺中區國立高中 103 學年度 第一次 學測聯合模擬考

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 30 分）

1. 下列哪個方程式恰有一實數解？

(1) $2^{|x|} = x^2$ (2) $2^x = \log_2 x$ (3) $4^x = x^4$ (4) $2^{|x|} = 2x$ (5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_{\frac{1}{2}} x$

2. 某生物實驗室對一個地區進行果蠅繁殖的生態調查，他們對該地區的果蠅密度用一種數列 $\langle d_n \rangle$ 來呈現，其中 d_n 代表第 n 週後調查所得到的密度。生物學家發現該地區果蠅密度 d_n 符合以下規

則：
$$d_n = \begin{cases} d_{n-1} + \frac{1}{2}, & 0 \leq d_{n-1} < \frac{1}{2} \\ 2 - 2d_{n-1}, & \frac{1}{2} \leq d_{n-1} \leq 1 \end{cases}$$
。如果該地區第一週後的果蠅密度 $d_1 = \frac{1}{10}$ ，

則 52 週後(一年後)的密度值為：

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$ (5) $\frac{7}{10}$

3. 在 xy 平面上，若二直線 $L: 3x + 4y = 23$ 和 $M: \begin{cases} x = 12t - 1 \\ y = at + 3 \end{cases}$ (t 為實數) 交角之正弦值為 $\frac{4}{5}$ ，則 $a = ?$

(1) $-\frac{7}{2}$ (2) -3 (3) 3 (4) $\frac{7}{2}$ (5) $\frac{5}{2}$

4. 在 xy 平面上，設直線 $L: 4x - 3y - 5 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 2tx + 6y + 10 = 0$ 相切，則 t 值在下列哪一個區間範圍內？

(1) $(-4, -3)$ (2) $(-2, -1)$ (3) $(0, 1)$ (4) $(2, 3)$ (5) $(4, 5)$

5. 下列哪一個選項 無法 找到實數 a ，使得選項中所有的數都滿足五次不等式

$$(103x - 2014)(-x^2 + x - 1)[x^2 + (a - 3)x - 3a] < 0$$

(1) 103, 2014 (2) 10, 20, 40, 80, 160 (3) 1, 11, 21, 31, 41
(4) 0, 20, 40, 60, 80, 100, …… (5) $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, \dots$

6. 設 $(1 + \sqrt{2})^7 = a + b\sqrt{2}$ ，其中 a 、 b 為整數，請問 $a^2 - 2b^2$ 等於下列哪一個選項？

(1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2 (5) 3

二、多選題（佔 30 分）

7. 已知 p 、 q 、 n 為正整數，且方程式 $x^3 + px^2 + qx + 2^n = 0$ 有一虛根為 $1 + \sqrt{15}i$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $1 - \sqrt{15}i$ 必為該方程式之一根 (2) 此方程式必有一正實根 (3) $p = 2$
(4) $p + q = 10$ (5) n 為質數

8. 若正實數 x 、 y 滿足 $\log_3 x = 1.7$ ， $\log_3 y = 5.1$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) x^{10} 為 9 位數 (2) x^{10} 個位數字為 9 (3) $\log_3(x^3 + 2y) = 6.1$
(4) $x^3 + 2y$ 的最高位數字為 9 (5) $x^{10} + y^3$ 為 9 位數

9. 已知 a 、 b 、 c 為相異三實數，且

$$f(x) = \frac{1-a}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c) + \frac{1-b}{(b-c)(b-a)}(x-c)(x-a) + \frac{1-c}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b),$$

則下列哪些選項是正確的？

- (1) $y = f(x)$ 有最小值 (2) $y = f(|x|)$ 有最大值
(3) $f(1.1^{0.9}) > f(0.9^{1.1}) > f(\log_{0.5} 5)$ (4) $\sum_{k=1}^{10} f(k)f(1+k) = 330$
(5) 對於任何一組數對 (a, b, c) 必可找到唯一一組實數對 (A, B, C) ，

$$\text{使得 } f(x) = A(x-a)(x-b) + B(x-b) + C$$

10. 已知大雄和靜香兩人同班，且知班上有男生 20 人，女生 10 人，今使用簡單隨機抽樣，選出 3 人出公差，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 已知選出的 3 人中有男有女，則大雄被抽中的機率大於靜香被抽中的機率
(2) 已知選出的三人同性別，則大雄被抽中的機率大於靜香被抽中的機率
(3) 抽樣的做法中，不管一次抽取 3 人或每次抽取一人逐次抽取，大雄和靜香兩人同時被抽中的機率相等
(4) 大雄和靜香兩人同時被抽中的機率大於 $\frac{1}{100}$
(5) 在大雄被抽中的條件下，靜香也被抽中的機率大於 $\frac{1}{10}$

11. 矩形 $OABC$ ，其中 $O(0,0)$ ， $A(2,1)$ ， B 在 y 軸的正向，設 $P(x,y)$ 為矩形邊上的動點，則下列哪些選項是正確的？

- (1) B 點坐標為 $(0,5)$ (2) $\overline{OC} = 2\overline{OA}$ (3) $3x + 2y$ 在 A 點產生最大值
(4) $\frac{y}{x+1}$ 在 B 點產生最大值 (5) 滿足 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 為正整數值的點 $P(x,y)$ 共有 9 個

12. 甲、乙、丙、丁四人為參加高三第一次模擬考，週末在家溫書，下面列出他們四人週末在家各科的溫書時間(小時)和成績(分)結果，

甲	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	2	4	5	3	1
成績	100	70	80	60	50

乙	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	2	3	3.5	2.5	1.5
成績	90	60	70	50	40

丙	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	1	3	4	2	0
成績	80	56	64	48	40

丁	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	5	0	3	1	2
成績	90	40	70	50	60

如表所示。則下列哪些選項是正確的？

- (1) 四人成績標準差 $\sigma_{甲}$ 、 $\sigma_{乙}$ 、 $\sigma_{丙}$ 、 $\sigma_{丁}$ 的大小關係為： $\sigma_{甲} > \sigma_{乙} = \sigma_{丁} > \sigma_{丙}$
- (2) 四人的成績與溫書時間均為正相關
- (3) 甲乙丙三人的成績與溫書時間之相關係數全相等
- (4) 丁的成績與溫書時間之相關係數為 1
- (5) 甲乙丙三人成績對溫書時間的迴歸直線中最陡者為乙

第貳部分：選填題（佔 40 分）

- A. 若實係數二次函數 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在 $-3 \leq x \leq 5$ 的範圍內，存在兩個相異的 x 值使 $f(x)$ 有相同最大值 3，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- B. 紅綠建設公司在臺中打算建造 10 層樓高的總部大樓，為了突顯公司的特色，決定每層樓只能用紅色或綠色的油漆來粉刷，每層樓只用一個顏色，而且不能有連續兩層是紅色的，則他們有 種可能的粉刷方式。
- C. 衛生單位長期針對甲、乙、丙三家食品工廠檢測是否含 A 、 B 兩種毒素，發現任何一家檢測出任一種毒素的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，且甲、乙、丙三家食品對於檢測結果互不影響，若檢測出至少含一種毒素的工廠就算不合格。在某次檢測中，已知這三家工廠皆不合格，則恰兩家工廠皆驗出兩種毒素的機率為 。

- D. 小胖、小美、小恩、小賢四人暑假去參加臺東熱氣球嘉年華活動，小胖、小美、小恩於鹿野高臺(視為一水平地面)相異三處，同時以仰角 60° 看到小賢搭熱氣球在空中向其他三人招手(不計三人身高)，若當時三人彼此之距離為 90 公尺、150 公尺、210 公尺，試問此時小賢所搭熱氣球離鹿野高臺場地之高度為_____公尺。
- E. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 2$ ，點 D 在 \overline{AC} 上且 $\overline{AD} = 1$ 、 $\overline{CD} = 2$ 。若 $\angle BDC = 2\angle A$ ，則 $\sin A =$ _____。
- F. $\triangle ABC$ 內部有一點 P ，使得 $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$ ，若 $\overline{PB} = 5$ 、 $\overline{PC} = 7$ 、 $\overline{PA} = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積為_____。
- G. 設 x 、 y 為正數且 $9x + 4y = 100$ ，則 $\frac{xy}{x+y}$ 的最大值為_____。
- H. 維維分別在甲、乙兩家銀行各存 10 萬元。已知甲銀行年利率 13.4%，乙銀行年利率 5%，若每年複利計算一次，則最快_____年後(取整數年)由甲銀行得到的本利和至少為從乙銀行得到本利和的 2 倍。

臺中區國立高中 103 學年度 第一次 學測聯合模擬考 參考解答

第壹部分：選擇題 (佔 60 分)

- | | | |
|------|--------|----------|
| 1. 5 | 5. 3 | 9. 245 |
| 2. 2 | 6. 1 | 10. 23 |
| 3. 4 | 7. 134 | 11. 125 |
| 4. 5 | 8. 135 | 12. 2345 |

第貳部分：選填題 (佔 40 分)

- | | | |
|------------------|-------------------------|-------|
| A. $(-2, -12)$ | D. 210 | H. 10 |
| B. 144 | E. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ | |
| C. $\frac{2}{9}$ | F. $20\sqrt{3}$ | |
| | G. 4 | |

如有題目或答案打字錯誤，或後續更正，
歡迎 email 至 weiye@pure.pro (瑋岳)提醒修改。感謝。