

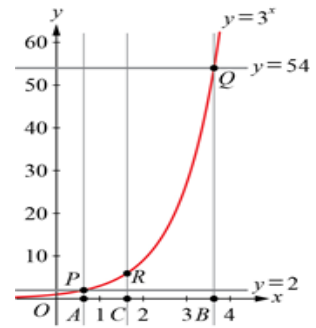
國立臺南女中 105 學年度第 2 次教師甄試數學科試題(請作答於答案卷)

一、多重選擇題：(每題 5 分，錯一選項得 3 分，錯二選項以上及未作答得 0 分,共 25 分)

1. 已知二次函數 $y = f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(0,0)$ 與 $(1,0)$ 兩點；二次函數 $y = g(x)$ 的圖形為開口向下的拋物線，且與 x 軸交於 $(0,0)$ 與 $(2,0)$ 兩點。下列各選項中，哪些可能是 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形？
- (1) 水平直線
 - (2) 斜率為正的直線
 - (3) 和 x 軸無交點的拋物線
 - (4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
 - (5) 和 x 軸交於兩點的拋物線
2. 數學研究社社員有男生 15 人、女生 10 人，其中社長是一位男生、副社長是一位女生，現在以抽籤方式推派社員參加一數學競賽，假設每位社員被抽到的機會均等，則下列何者正確？
- (1) 若只需抽派一位社員，則社長被抽到的機率大於副社長被抽到的機率
 - (2) 若只需抽派一位社員，則男生社員被抽到的機率等於女生社員被抽到的機率
 - (3) 若需抽派二位社員，則社長被抽到的機率大於副社長被抽到的機率
 - (4) 若需抽派二位社員，則抽到兩位男生社員的機率大於抽到兩位女生社員的機率
 - (5) 若需抽派二位社員，則社長、副社長都被抽到的機率大於 $\frac{1}{100}$
3. 選出正確的選項
- (1) $\log_{0.5} 0.7 > \log_{0.5} 0.8$
 - (2) $9^{10} > 10^9$
 - (3) $2 < \log_{\frac{4}{3}} 3 < 3$
 - (4) 若 $\log_x 4 < 1$ 則 $4 < x$
 - (5) 若 $a > 1 > b > 0$ 則 $\log_a b \geq \log_b a$
4. 設 a 、 b 、 c 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 3x + 4y + bz = -1 \\ 2x + 10y + 7z = c \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？
- (1) 若此方程組有解，則必定恰有一組解
 - (2) 若 $11a - 3b \neq 7$ ，則此方程組必有解
 - (3) 若 $c = 14$ ，則此方程組必有解
 - (4) 若此方程組無解，則 $11a - 3b = 7$
 - (5) 若此方程組無解，則 $c \neq 14$
5. 有 20 筆數據 (x_i, y_i) ， $i = 1, 2, \dots, 20$ 。其平均 $\mu_x = 3$ 、 $\mu_y = 5$ ， x 與 y 的相關係數 $r = 0.8$ ，且 y 對 x 的迴歸直線通過點 $(2,0)$ 。選出正確的選項。
- (1) X 與 Y 為正相關
 - (2) 迴歸直線通過點 $(3,5)$
 - (3) 迴歸直線的斜率為 0.8
 - (4) 迴歸直線通過點 $(4,10)$
 - (5) x 的標準差小於 y 的標準差。

二、填充題：(每格 4 分,共 60 分)對數表請參照附表

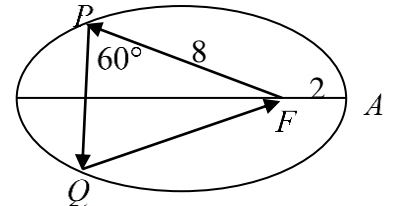
6. 右圖為 $y=3^x$ 的圖形。直線 $y=2$ 、 $y=54$ 分別和圖形交於 P 、 Q 兩點。過 P 、 Q 對 x 軸作垂線得垂足 A 、 B 。設 C 為靠近 A 的 \overline{AB} 三等分點，由 C 對 x 軸作垂線交 $y=3^x$ 的圖形於 R 點，如右圖，試求 R 點的 y 坐標_____。



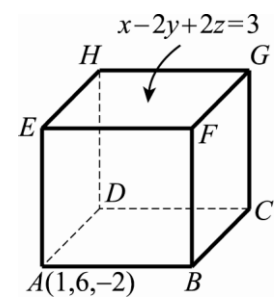
7. 設 a 為正整數，滿足 a^{10} 乘開後為一個最高位數字為 3 且個位數字為 6 的 22 位數，則 a 值為_____。
8. 從 5 個男生及 2 個女生中，選出 4 人同坐一艘四人座香蕉船，若選出的 4 人要有男生也要有女生，且前兩個座位至少有一人是男生，則座位的安排共有_____種。



9. 右圖為一個橢圓，焦點 F 與頂點 A 的距離為 2 單位長。現在有一道雷射光由 F 出發，行經 8 單位長之後碰到橢圓上的 P 點反射，再碰到橢圓上的 Q 點反射回 F 點，若 $\angle FPQ = 60^\circ$ ，則 $\triangle FPQ$ 的周長為_____單位長。



10. 右圖中， $ABCD-EFGH$ 為一個正立方體，它的面 $EFGH$ 所在的平面方程式是 $x-2y+2z=3$ ，且 A 點的坐標為 $(1,6,-2)$ 。求 E 點的坐標為_____。



11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{AC}=9$ ， $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 。設點 P 、 Q 分別在邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上使得 $\triangle APQ$ 之面積為 $\triangle ABC$ 面積之 $\frac{1}{4}$ ，則 \overline{PQ} 之最小可能值為_____。

12. 已知二次函數 $f(x) = 8 \cdot \frac{(x-5)(x-7)}{(3-5)(3-7)} + 8 \cdot \frac{(x-3)(x-7)}{(5-3)(5-7)} + 22 \cdot \frac{(x-3)(x-5)}{(9-3)(9-5)}$ 的圖形通過相異兩點 $A(r, 22)$ 與 $B(s, 22)$ ，求 $r \times s$ 的值_____。
13. 已知兩虛數 k 與 k^2 都是實係數方程式 $3x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ 的根，求 $a + b =$ _____。
14. 統計學家克利夫蘭詳細研究人體的眼睛後發現：眼睛看到的圖形面積與此圖形實際面積的 K 次方成正比(K 為實數)。今觀察地圖上大、小兩國，感覺大國面積是小國面積的 64 倍，且實際上大國面積是小國面積的 1024 倍，求 $K =$ _____。
15. 一場車禍肇事者逃逸，警方根據目擊證人提供的車牌號碼的兩個線索如下：
- (1) 號碼為 AB-XXX1，其中「X」代表 0~9 的數字
 - (2) 其中四個數字中恰有兩個數字相同
- 試問根據此二線索，警方最多要清查_____台車輛。
16. 某遊戲中獎規則如下：莊家先選定 1~15 中三個相異整數，同樣的，玩家也在 1~15 中任選三個相異整數，若選到的數字與莊家各有 3、2、1 個數字相同，則分別中頭獎、二獎、三獎，已知玩家中獎的條件下，求他中三獎的機率_____。
17. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 之前 n 項的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 為 $3n^2 - 4$ ，求一般項 $a_n =$ _____。

18. 已知空間中三直線 $L_1: \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, $L_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}$, $L_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ 兩兩歪斜，若一長方體的某三邊分別落在這三條直線上，求這個長方體最長的對角線長度為_____。

19. 試設計題目以表示下列排列組合符號所代表之意義

(1) P_3^{10} _____ (2) $H_8^4 \times 2$ _____

三、計算證明題(共 15 分)

- 請敘述牛頓定理(一次因式檢驗法)。(4 分)
- 若 $|x-2| + 2|x+3| - |x-1| = k$, 請就 k 值討論方程式之解的個數。(7 分)
- 若 X 、 Y 相關係數為 r , 請證明當 $P = aX + b$ 、 $Q = cY + d$ 時：
 - 若 $ac > 0$, 則 P 與 Q 的相關係數為 r (2 分)
 - 若 $ac < 0$, 則 P 與 Q 的相關係數為 $-r$ (2 分)

附表：常用對數表 $y = \log x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989

國立臺南女中 105 學年度第 2 次教師甄試數學科答案卷

一、多重選擇題：(每題 5 分，錯一選項得 3 分，錯二選項以上及未作答得 0 分,共 25 分)

1 245	2 4	3 12	4 2345	5 1245
----------	--------	---------	-----------	-----------

二、填充題：(每格 4 分,共 60 分)對數表請參照附表

6 6	7 144	8 680	9 22	10. (3,2,2)
11. 3	12. -9	13. 10	14. 0.6	15. 432
16. 198/235	17. $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 6n - 3(n \geq 2) \end{cases}$	18 $\frac{\sqrt{1834}}{14}$	/	
19. (1)10 人選三人排成一列的方法數。 (2) $ x + y + z + u = 12$ 的解個數，其中 x 為非零的整數且 y, z, u 為正整數。				

三、計算證明題(共 15 分)

1. (4 分)

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 是一個整係數 n 次多項式。若一次式 $ax - b$ 是 $f(x)$ 的因式 (其中 a, b 是整數且 a, b 互質)，則 a 是 a_n 的因數且 b 是 a_0 的因數。

2.(7 分)

(1)若 $x \geq 2$, $y = 2x + 5$

(2)若 $1 \leq x \leq 2$, $y = 9$

(3)若 $-3 \leq x \leq 1$, $y = 2x + 7$

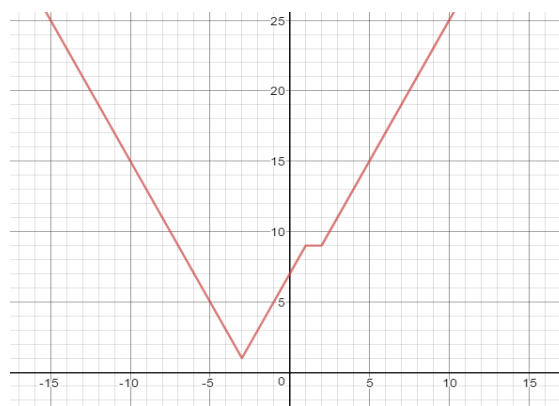
(4) 若 $x \leq -3$, $y = -2x - 5$

所以，(1)當 $k > 9$ 或 $1 < k < 9$ 時，恰有二解

(2)當 $k = 9$ 時，無限多解

(3)當 $k = 1$ 時，恰有一解

(4)當 $k < 1$ 時，無解



3.(4分)

$$\begin{aligned} r_{(P,Q)} &= \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - \mu_p)(q_i - \mu_q)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - \mu_p)^2 \sum_{i=1}^n (q_i - \mu_q)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (ax_i + b - (a\mu_x + b))(cy_i + d - (c\mu_y + d))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (ax_i + b - (a\mu_x + b))^2 \sum_{i=1}^n (cy_i + d - (c\mu_y + d))^2}} \\ &= \frac{ac}{|ac|} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}} = \frac{ac}{|ac|} \cdot r_{(x,y)}, \end{aligned}$$

①若 $ac > 0$, $\frac{ac}{|ac|} = \frac{ac}{ac} = 1$, 則 $r_{(P,Q)} = r_{(x,y)}$.

②若 $ac < 0$, $\frac{ac}{|ac|} = \frac{ac}{-ac} = -1$, 則 $r_{(P,Q)} = -r_{(x,y)}$.