

# 105 萬芳高中第二次教師甄選 數學科

## 一、填充題(每題 6 分，共 60 分)

1. 設  $[\cdot]$  為高斯符號，試求  $\sum_{n=1}^{2016} [\log_8 n]$ 。
2. 在二次曲線  $\Gamma: 9x^2 - 18x + 16y^2 - 64y - 71 = 0$  上，距離直線  $x - y = 10$  最近的點為  $P$ ，試求  $P$  點的座標。
3. 設  $I, O$  分別為二階單位方陣與零矩陣，若  $A, X, Y$  均為二階方陣且滿足下列式子，求  $a + b$  的值。
$$\begin{cases} X + Y = I \\ XY = O \\ aX + bY = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$
4. 現在有三本不同的國文課本和三本相同的數學課本，若想將它們放在一個上下有四層，每層的空間均足夠放六本書的櫃子，請問書的擺放方法有幾種？
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^3}{(x - 2)e^x + x + 2} = ?$
6. 令  $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ ，則  $x = ?$
7.  $25^{105} \equiv ? \pmod{7}$
8.  $\triangle ABC$  的  $\overline{AB} = 13, \overline{BC} = 14, \overline{AC} = 15$ ，若有一個圓的圓心在  $\overline{BC}$  上，且與  $\overline{AB}, \overline{AC}$  均相切，試求此圓的半徑。
9. 數列  $\langle a_n \rangle$  的通式如下，試求  $a_n$ 。
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}, n \geq 1. \end{cases}$$
10. 令  $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ ，試求  $\frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{1 - \sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{1 - \sqrt{x}}}$ 。

二、計算證明題 (每題 10 分，共 40 分)

1. 如果有高一的學生問你相關係數  $r$  的範圍是  $-1 \leq r \leq 1$ ，你要如何解釋？
2. 設  $f(x) = x^4 + 3ax^2 - 2(3a + 2)x + a^2$ ，且  $a > 0$ ：
  - (a) 試求  $f(x)$  的最小值。
  - (b) 若  $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) > 0$ ，試求  $a$  的範圍。
3. 設  $\triangle ABC$  是一個直角三角形， $\angle B$  是直角，若  $D$  為  $\overline{AC}$  上任何一點，證明：
$$(\overline{BD} \times \overline{AC})^2 = (\overline{AD} \times \overline{BC})^2 + (\overline{CD} \times \overline{AB})^2。$$
4. 美美減重計畫：美美打算從今天起連續七週，每天吃至少一顆蘋果，每週至多不超過十一顆。請證明存在一段連續不間斷的日子，在這些日子裡美美恰好吃 20 顆蘋果。