

105 萬芳高中教師甄選 數學科

1. 將所有的奇數，以括號作分組如下：

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

(a) 試求第 n 組的首末項。

(b) 試求第 n 組所有數字總和。

(c) 利用上述的結果，求 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = ?$

2. 現在要從 n 個囚犯中提取若干人作審訊，為了防止串供，編號連續的囚犯不得同時拘提。例如編號 1, 2, 3, 4, 5, 6 等六人，一次可以同時拘提 135 號囚犯，或 24 號囚犯，亦可以只拘提 5 號一人。令 $F(n)$ 表示 n 有個囚犯時一次拘提若干人的方法數，請回答以下問題。

(a) $F(1) + F(2) + F(3) = ?$

(b) 若 $F(n) = aF(n-1) + bF(n-2) + c, n \geq 3$ ，求 a, b, c 。

(c) $F(6) = ?$

3. 在半徑為 3 的球外切一個直圓錐，求此直圓錐的最小體積？

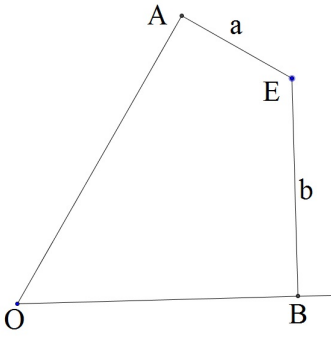
4. $y = 5x^3 - 5x^2 - x + 1$ 和 $y = 5px^2 - 71px + 66p$ 的圖形有三個交點且此三交點的 x 座標均為正整數，求 $p = ?$

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 2\angle C, \overline{BC} = 5, \overline{AC} = 6$ ，求 $\frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} = ?$

6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)(1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5)}{(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)} = ?$$

7. 如圖， $\angle AOB = 60^\circ, \overline{EA} \perp \overline{OA}, \overline{EB} \perp \overline{OB}$ ，設 $\overline{EA} = a, \overline{EB} = b$ ，若 $\overline{OE} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB}$ ，請用 a, b 表示 α, β 。



8. 設 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 是某班的數學-英文成績，今天用線性調分的方式將數學成績調整成 $2x_i + 5, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，英文成績調為 $1.5y_i + 10, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，調整完後沒有人破 100 分，請問：
- (a) 英文成績對數學成績的相關係數是否有改變，如何解釋給學生聽懂？
 - (b) 英文成績對數學成績的迴歸直線斜率是否有改變，如何講解給學生？
9. 你認為二項分布中哪些是較難學習，容易混淆的概念？並請據此設計十分鐘的教案，幫助學生學習。