

一題

將原方程組整理成 x, y, z 的三元一次聯立方程式，
視為已知數放於一邊（等同用 u 表示 x, y, z ）

$$\text{原} \begin{cases} x+y = 3(z+u) \\ x+z = 4(y+u) \\ x+u = 5(y+z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-3z = 3u \\ x-4y+z = 4u \\ x-5y-5z = -u \end{cases}$$

$$\text{計算 } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 34, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3u & -3 \\ 4u & 4 \\ -u & -5 \end{vmatrix} = 166u$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3u & 3 \\ 1 & 4u & 1 \\ 1 & -u & -5 \end{vmatrix} = 14u, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3u \\ 1 & -4 & 4u \\ 1 & -5 & -u \end{vmatrix} = 26u$$

By Cramer's Rule

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{83}{17}u, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{17}u, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{13}{17}u$$

\Rightarrow 當 $u=17$ 時， x, y, z 均為自然數且為最小正整數解

$\Rightarrow x=83$ 為最小