104 學年度台灣省第六區(台南區)

高級中學數理與資訊學科能力競賽 試題 1

注意事項:

(a) 時間分配：2 小時。
(b) 本試卷共 4 題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
(c) 將計算證明過程詳敘寫在答案卷上。不可使用電算器。
(d) 試題與答案卷需一同繳回。

(1). 設 x, y, z 是三個相異的自然數使得 xyz 是 $(xy-1)(yz-1)(zx-1)$ 之因數。試求所有可能的數對 (x, y, z)。

(2). 設數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n，已知 $a_1 = 1$ 且

$$(5n-8)S_{n+1} - (5n+2)S_n = -20n - 8,$$

試求 $\displaystyle\sum_{k=101}^{150} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 之值。

(3). 已知 ΔABC 中，$\overline{BC} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{PA} = 3\overline{BP}$，

試證：$\angle CAP = 2\angle CPA$。

(4). 在一個正圓錐體內部放入一內切球，設此正圓錐體的表面積和體積分別為 A 和 B，此內切球的表面積和體積分別為 m 和 n，試求 $\log_3\left(\frac{An}{Bm}\right)^2$ 之值。

104 學年度台灣省第六區(台南區)

高級中學數理與資訊學科能力競賽複試 試題 2

注意事項:

(a) 時間分配：1 小時。
(b) 本試卷共 6 題，滿分 21 分，第一題 3 分，第二題 3 分，第三題 3 分，第四題 4 分，第五題 4 分，第六題 4 分。
(c) 將計算證明過程詳敘寫在答案卷上。不可使用電算器。
(d) 試題與答案卷需一同繳回。

1. 若 $7x-\dfrac{1}{y}=16$ ，$xy+\dfrac{1}{xy}=30$ ，試求 $2xy-20x+9$ 之值。

2. 有一個十位數 A，其數字由左至右分別為 a_1、a_2、…、a_{10}，其中 $a_1=1$，而 a_2、a_3、…、a_{10} 皆為 0 或 1，且滿足 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$ ，試求滿足這樣條件的 A 之個數。

3. 若 a,b 是方程式 $x^4-3x^3+x^2-2x+4=0$ 的兩個根，則 ab 會是方程式 $x^6-x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5=0$ 的一個根。
試求 $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$ 之值。

4. 已知 $O(0,0)$ 和 $A(1,0)$ 為直角坐標平面上的兩點，有一點 B 落在以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓上且點 B 位於第一象限，試求 ΔOAB 的內切圓圓心的軌跡方程式。

5. 設 a,b 為整數，如果多項式 x^2-x-1 為 $ax^{17}+bx^{16}+1$ 的因式，試求 a 之值。

6. 若函數 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 滿足 $f(xf(y))=f(xy)+4x$ ，其中 x,y 為正實數，
試求 $\displaystyle\sum_{n=2000}^{2015}f(n)$ 之值。