臺北市立松山家商 105 學年度第 1 次教師甄選初試數學科 參考答案

第壹部分：填充題 (佔 64 分) ：每題答對得 8 分。

題號	1	2	3	4
答案	**10000**	**36**	$\sqrt{21}$	**6**
題號	5	6	7	8
答案	$\left(\frac{52}{15},\frac{28}{5}\right)$	**27**	$(2,-\frac{155}{12})$	**366**

第貳部份 ：計算證明題 (佔 36 分) 每題 12 分

1

(1) $Q(0)=a+b=6000$

(2) $Q(4)=a+b\cdot(\frac{5}{2})^{-2}=a+\frac{4}{25}b=9360$

兩式聯立解得 $a=10000$ ， $b=-4000$

$Q(N)=10000-4000\cdot(\frac{5}{2})^{-0.5N}>9500\quad\Rightarrow(\frac{5}{2})^{-0.5N}<\frac{1}{8}$

$\Rightarrow -0.5N(1-2\log 2)<-3\cdot\log 2$

$\Rightarrow N>\frac{0.9030}{0.5\times 0.3980}=4.\cdots$

$\Rightarrow n\geq 5$

2

解：利用平方和公式得 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

利用立方和公式得 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

再令 $x+y=\alpha, xy=\beta$（代換法） $\begin{cases} x+y=\alpha=4 \\ (\alpha^2-2\beta)(\alpha^3-3\alpha\beta)=280 \end{cases}$

$$(8-\beta)(16-3\beta)=35 \Rightarrow 3\beta^2-4\beta+93=0$$

$$(3\beta-31)(\beta-3)=0 \Rightarrow \beta=3 \vee \beta=\frac{31}{3}$$

(1)利用根與係數 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(3,1)\vee(1,3)$ (6 分)

(2) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=\dfrac{31}{3} \end{cases} \Rightarrow t^2-4t+\dfrac{31}{3}=0 \Rightarrow 3t^2-12t+31=0$

但是「判別式」$(-12)^2-4(3)(31)=-228<0 \Rightarrow$ 無實數解，利用虛數 $i=\sqrt{-1}$ 可以得到二組複數根

$(x,y)=(2+\dfrac{\sqrt{57}}{3}i, 2-\dfrac{\sqrt{57}}{3}i)\vee(2-\dfrac{\sqrt{57}}{3}i, 2+\dfrac{\sqrt{57}}{3}i)$ (6 分)

3.

因 $n^2=(m+1)^3-m^3=3m^2+3m+1$，所以 $(2n-1)(2n+1)=4n^2-1=12m^2+12m+3=3(2m+1)^2$。

因 $2n-1, 2n+1$ 互質，所以這兩個數一個是奇數平方，另一個是奇數平方乘以 3。

但若 $2n-1$ 是奇數平方乘以 3 且 $2n+1$ 是奇數平方，因 $2n-1\equiv 0 \pmod 3$ 故知 $2n+1\equiv 2 \pmod 3$，

但因平方數除以 3 的餘數必為 0 或 1，得矛盾，所以 $2n-1$ 是奇數平方。

設 $2n-1=b^2$（$b>1$ 是奇數），因 $2n+287$ 是一個正整數的完全平方，

設 $2n+287=a^2$（a 是奇數），得 $a^2-b^2=288$。

所以 $a+b=144$，$a-b=2$（因為 $a+b$ 與 $a-b$ 均為偶數且 $2n+1$ 是奇數平方乘以 3，故其他組合皆不合），得 $b=71$。而 $2n-1=5041$，$n=2521$，得 $2n+1=5043=3\times 41^2$，所以 $m=1455$。