

國立高雄餐旅大學附屬餐旅高級中等學校105學年度教師甄選

數學科試題卷

一、填充題：70分(每題5分，請標明題號將答案寫在答案本上)

1. $x \in \mathbb{R}$ ，求不等式： $x > \sqrt{3-2x}$ 的解為_____。
2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 5^{n-1}}{8^n} =$ _____。
3. 用1,2,3,4,5,6這六個數字排成數字沒有重複的六位數，則大於215364且小於423651的數共有_____個。
4. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，若 $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} = 3a_n - 1$ ，則 $a_n =$ _____。
5. $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ 為複數平面上三相異點，滿足 $|\alpha - \beta| = 2$ ，且 $\alpha - 2\beta + \gamma = \sqrt{3}i(\beta - \gamma)$ ，則 $\overline{AC} =$ _____。
6. 若對直線 $y = mx$ 作鏡射的矩陣為 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，則 m 之值為_____。
7. 設 a_n 為 $(3 - \sqrt{x})^n$ 展開式中 x^2 項的係數($n \geq 4$)，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^4}{a_4} + \frac{3^5}{a_5} + \frac{3^6}{a_6} + \dots + \frac{3^n}{a_n} \right)$ 。
8. 空間中一立體滿足 $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 36$ 、 $0 \leq z \leq 105$ ，若平面 $x + \sqrt{2}y + z = 2 + 3\sqrt{2}$ 將此立體切割成 V_1 、 V_2 兩部分且 $V_1 \leq V_2$ ，試求 V_1 的體積。
9. 求函數： $f(x) = \frac{4}{1 + \cos^2 x} + \frac{9}{1 + \sin^2 x}$ 之最小值=_____。
10. 求橢圓： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 在直線 $x + y - 10 = 0$ 之投影長=_____。
11. []表高斯符號，求解 $3x^2 - 19 \cdot [x] + 20 = 0$ 。
12. $f(x) = \sqrt{3x + \sqrt{x^2 + 4}}$ ，求 $f'(0) =$ _____。

13. 將長 $\overline{AB} = 240$ ，寬 $\overline{BC} = 288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 \overline{AB} 的中點 M 上，如下圖 1 所示：

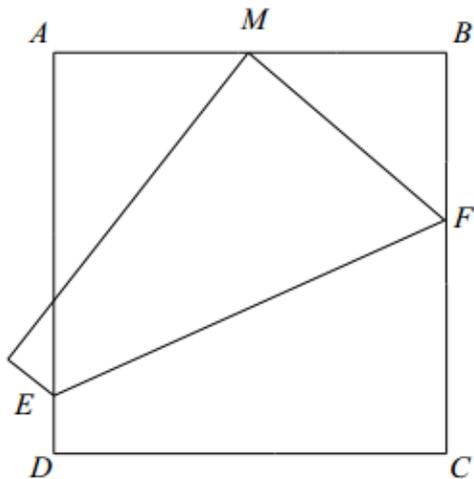


圖 1

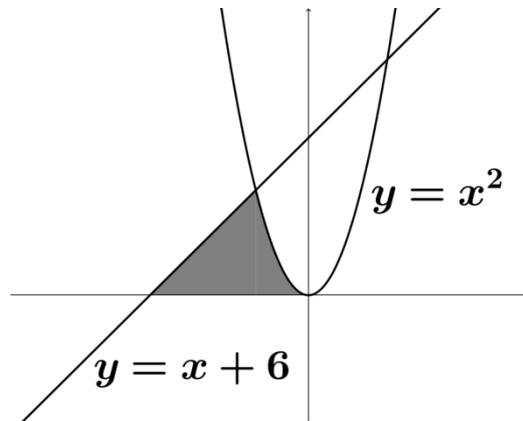


圖 2

若 \overline{EF} 是摺線，則摺線 \overline{EF} 的長度為_____。

14. 如上圖 2，求圖形中灰色部分的面積=_____。

二、計算題：30 分(請寫出計算過程，否則不予計分)

1. 一個不均勻的骰子，出現 6 點的機率為 p ，連續投擲此骰子 n 次，隨機變數 X 表示出現 6 點的次數，試證明：

(1) $E(X) = np$ (4 分)

(2) $Var(X) = np(1-p)$ (6 分)

2. 求 $\begin{cases} (3a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \\ 2(b^4 - a^4) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \end{cases}$ 之實數解。(10 分)

3. 設 a 、 b 、 c 均為大於 1 的實數，試證明 $2 \cdot \left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a} \right) \geq \frac{9}{a+b+c}$ 。

(10 分)