

臺北市立成功高級中學 105 學年度第 1 次教師甄選數學科筆試試題(A)卷

計算證明題(共 9 題，請作答於答案卷上，可不照順序書寫，但務必標明題號。)

1. (10 分) $\triangle ABC$  中， $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，請用兩種方法證明餘弦定理。
2. (20 分)下面是學生常見的解題法，請問學生解法是否正確？若正確，此題在講述中你會強調那些概念；若不正確，錯在哪裡？正確的解法為何？

(1)題目：設  $x^2 + ax + b = 0$  的兩實根，一根在  $-2$  和  $-1$  之間，另一根在  $1$  和  $2$  之間，求數對  $(a, b)$  的範圍？

學生解法：

假設兩根為  $\alpha$  與  $\beta$ ，故  $\begin{cases} -2 < \alpha < -1 \\ 1 < \beta < 2 \end{cases}$ ，故  $\begin{cases} -1 < \alpha + \beta < 1 \\ -4 < \alpha\beta < -1 \end{cases}$ ，由根與係數關係可知  $\begin{cases} -1 < a < 1 \\ -4 < b < -1 \end{cases}$

即為所求。

(2)題目：設  $y = h(x) = x|x|$ ，試問此函數在  $x = 0$  是否可微分？

學生解法：

令  $f(x) = x$ ， $g(x) = |x|$ ，已知  $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ，因為  $g(x) = |x|$  在  $x = 0$  不可微，則  $g'(x)$  不存在，故  $h(x)$  不可微。

3. (10 分)考慮一個參數是  $(n, p)$  的二項分布之機率質量函數，請問機率的最大值發生在隨機變數  $X$  為何時？

4. (10 分)小明在解三元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + 3y - z = 3 \cdots \cdots (1) \\ 2x + 2y + z = 3 \cdots \cdots (2) \\ 3x + y - 2z = 8 \cdots \cdots (3) \end{cases}$  的過程為

步驟一：(1)式 + (2)式得  $3x + 5y = 6 \cdots \cdots (4)$

步驟二：(2)式乘 2 + (3)式得  $7x + 5y = 14 \cdots \cdots (5)$

步驟三：解(5)式與(4)式得  $x = 2, y = 0 \cdots \cdots (6)$

步驟四：將步驟三的結果代入(1)式，得  $x = 2, y = 0, z = -1$ 。

但三元一次方程式表示空間中的平面，我們假設三平面  $E_1 : x + 3y - z = 3$ 、 $E_2 :$

$2x + 2y + z = 3$ 、 $E_3 : 3x + y - 2z = 8$ ，則聯立方程組  $\begin{cases} x + 3y - z = 3 \cdots \cdots (1) \\ 2x + 2y + z = 3 \cdots \cdots (2) \\ 3x + y - 2z = 8 \cdots \cdots (3) \end{cases}$  的解即三平面

的交點。

請問：小明的解法是否可行？若不行，哪裡需要修正？並且請針對小明的每一個步驟，說明其對應的幾何意義。

5. (15分)圓錐曲線  $x^2 - 12xy - 4y^2 = 40$

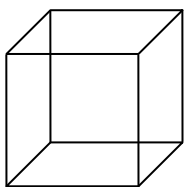
(1)求一矩陣  $A$ ，使得  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 - 12xy - 4y^2 = 40$ 。

(2)試求出一正交矩陣  $P$  和對角矩陣  $D$ ，使得  $P'AP = D$ 。

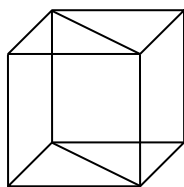
(3)若將圓錐曲線經由變數變換，得到新的變數  $(x', y')$ ，使曲線消去  $xy$  項，試求出此變數變換為何？

6. (10分)圓上有  $n$  個點，將此  $n$  個點互相連線(可得  $\frac{n(n-1)}{2}$  條弦)，這些弦最多可以將圓分割成  $a_n$  個區域，則  $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ 、 $a_3 = 4$ 、 $a_4 = 8$ 、 $\dots$ ，請求出  $a_5 = ?$ ， $a_6 = ?$  寫出  $a_n$  的遞迴關係式並說明理由。

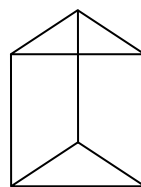
7. (10分)在教學中，我們常常需要自製教具，為了要說明錐體的體積等於柱體體積的  $\frac{1}{3}$ ，因此我們先將一個邊長為 1 的正方體(如圖一所示)切成兩個全等的三角柱(如圖二所示)，接著將其中一個三角柱(圖三)分割成三個體積相等的三角錐，請你畫出三角錐的展開圖，並且標示每條邊的長度。



圖一



圖二



圖三

8. (10分)在一個邊長為  $a$  的正立方體內，內切兩個正交的圓柱體，假設這兩個圓柱體相交的立體為  $V$ ，求此立體  $V$  的體積為何？

9. (10分)以曲線  $y = x^3$  上異於反曲點的任意一點  $A$  為切點作切線，設此切線與曲線交於另一點  $B$ ，再以  $B$  為切點作曲線的切線作曲線於另一點  $C$ ，並設  $R$  為曲線與切線  $AB$  所圍成區域的面積，而  $S$  為曲線與切線  $BC$  所圍成的面積。試問  $R$  與  $S$  面積有何關係？(此性質又稱為陳朱洪性質)