

第一大題 填充題 每題 5 分 共 80 分

1. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 前 n 項和為 S_n ， $n \in N$ ，若函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形恆過點 (n, S_n) ，且 $S_4 = 24$ ， $a_3 = 7$ ，則函數 $f(x)$ 的最小值為？

2. 若 x, y, a, b 為實數， a, b 為正數，

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 9)(a^2 + b^2 + 4) = (ax - by + 6)^2 \\ \frac{2a}{3b^2} + \frac{b}{2} + \frac{3b}{a} = 3 \end{cases},$$

試求數對 $(x, y, a, b) = ?$

3. 某學生想安排週日一天的讀書活動，他將時間分成上午四節、下午四節，共八節等長的時間，欲安排入三節數學，以及英文、國文、化學、物理、公民各一節，但是為了避免讀書太單調，所以不管是分別在上午或下午的時段中，任兩節數學課都不可以連排，又因為中午有休息的關係，可以第四、五節同時排數學，則他本次週日的讀書活動有多少種排法？

4. 近幾年的新聞有看過冤獄國賠的例子，情形如下：凡經檢方起訴，經法官一審後被判有罪，即須入監服刑，服刑完畢之後，無罪的人一定會提起冤獄賠償訴訟，而有罪的人會提起冤獄賠償訴訟的機率為 $\frac{1}{2}$ ，且冤獄賠償訴訟只能提告一次，經法官判定後即不能再上訴。假設

(1) 被檢方起訴的人有 $\frac{4}{5}$ 的人真的有罪，

(2) 每位法官誤判的機率為 $\frac{1}{10}$ 。

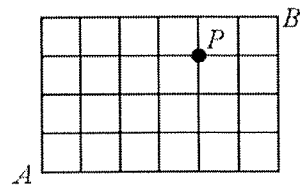
若已知有一個人被判有罪，服滿刑期後，提起了冤獄訴訟，而獲得了國賠。請問他真的應該獲得國賠的機率為？

5. 設實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 = 9$ 且 $(c-5)^2 + (d-12)^2 = 4$ ，

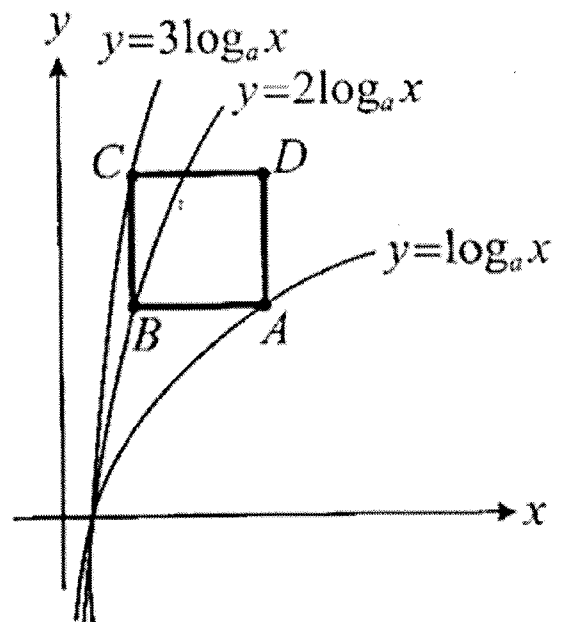
則 $ad - bc$ 的最大值為？

6. 若一元四次多項式方程式 $x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 11 = 0$ 的四個根分別為 a, b, c, d ，且方程式 $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} = 0$ 的三個實根由小至大分別為 x_1, x_2, x_3 ，則有序數組 $(x_1, x_2, x_3) = ?$

7. 如右圖的棋盤路徑，要由 A 點走捷徑到 B 點。若有通過 P 點，則在 P 點必須轉彎，則共有多少種走法？



8. 設 a, b, c, d 為實數，已知方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有四個虛根，此四根中，其中二根的乘積為 $13 + i$ ，另二根的和為 $3 + 4i$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，則 $(a, b) = ?$
9. 如右圖，設 $ABCD$ 為正方形，已知正方形 $ABCD$ 的面積為 36，且 \overline{AB} 平行 x 軸， A, B, C 三點分別在 $y = \log_a x$ 、 $y = 2\log_a x$ 、 $y = 3\log_a x$ 的圖形上，則 $a = ?$



10. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{105}$ 為 $x^{105} + 2x^{104} + 3 = 0$ 的複數根，則

$$(\alpha_1^2 + 1)(\alpha_2^2 + 1) \cdots (\alpha_{105}^2 + 1) = ?$$

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長度各別為 a 、 b 、 7 ，則
求 $a^2 \cos 2B + 2ab \cos(A-B) + b^2 \cos 2A$ 之值 = ?
12. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2} (\sqrt{4n^2 - 1^2} + \sqrt{4n^2 - 2^2} + \sqrt{4n^2 - 3^2} + \dots + \sqrt{4n^2 - n^2}) = ?$
13. 設 A 袋有 2 個十元硬幣， B 袋有 3 個五元硬幣，從 A 袋任取一個錢幣與 B 袋任取一個錢幣互換，進行 3 次後，求 A 袋中錢幣金額的期望值為?
14. 請問欲使 $f(a, b) = (a + b - 2)^2 + (a + 2b - 3)^2 + (a + 3b - 5)^2 + (a + 4b - 8)^2$
有最小值，此時的實數數對 $(a, b) = ?$
15. 設 z 為複數，若 $|z + 1 + i|^2 + |z - 1 - i|^2 = 14$ ，則 $|z| = ?$
16. 設數列， $a_n = \sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}$ ，則 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{105}} = ?$

數學答案

第一大題 填充題

1	2	3	4
-1	(9, -3, 6, 2)	2880	$\frac{1}{3}$
5	6	7	8
45	(1, 3, 5)	155	(-6, 51)
9	10	11	12
$\sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}}$	26	49	$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$
13	14	15	16
$\frac{505}{36}$	$(-\frac{1}{2}, 2)$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt[3]{106} + \sqrt[3]{105} - 1}{2}$