

姓 名：_____

准考證號碼：_____

國立臺南第一高級中學 103 學年度學術性向資優鑑定
【數理類】複選第二階段數學實作評量試題

各位同學好，作答之前，請詳閱以下注意事項：

1. 手機請務必關機，手錶鬧鐘鬧鈴設定請取消，並將手機放置於前方地板上。
2. 桌上僅放置准考證及文具。
3. 遲到 15 分鐘以上不准入場，考試開始 30 分鐘內不准交卷出場。
4. 考生不得將試題及答案卡（卷）攜出試場，違者該科不予計分。
5. 請用鉛筆或原子筆作答。
6. 請在試題本及答案卷上方填入准考證號碼及姓名。
7. 考試時間為 80 分鐘，自 8：00 ~ 9：20。
8. 試題共 2 頁，均為非選擇題。

☆鈴響前請勿翻開試題本☆

第一部分：填充題，每題 8 分，共 40 分。

1. 有一個二位數 α ，其十位數與個位數交換後，得另一個二位數 β ，若 $\alpha^2 - \beta^2$ 為一非零之完全平方數，則 $\alpha = ?$

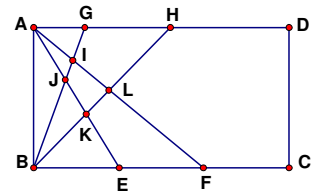
2. 有一三角形 ABC ， $\angle BAC = 58^\circ$ 、 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 2$ ， $\angle BAC$ 的角平分線交 \overline{BC} 的中垂線於 O ，

以 O 為圓心 \overline{OB} 為半徑作一圓，交 \overline{AB} 於 D ，則劣弧 \widehat{DC} 的角度為何？

3. 如圖，有一長方形 $ABCD$ ， \overline{AD} 上有兩點 G 、 H 且 $\overline{AG} : \overline{GH} : \overline{HD} = 3 : 5 : 7$ ， \overline{BC} 上有兩點 E 、

F 且 $\overline{BE} : \overline{EF} : \overline{FC} = 1 : 1 : 1$ ， \overline{AF} 與 \overline{BG} 交於 I 、 \overline{AE} 與 \overline{BG} 交於 J 、 \overline{AE} 與 \overline{BH} 交於 K 、 \overline{AF} 與

\overline{BH} 交於 L ，若 $\overline{AB} = 936$ 、 $\overline{BC} = 300$ ，則四邊形 $IJKL$ 面積為何？



4. 解聯立方程式 $\begin{cases} 20x = 15y = 12z \\ z = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{y^2 - 16} \end{cases}$ ，求 $x + y + z = ?$

5. 將一個 n 邊形的各邊塗上藍、白、紅三色之一，且相鄰的邊不得同色，其方法有 a_n 種，若

$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ ，求數對 $(\alpha, \beta) = ?$

第二部分：計算證明題，每題 12 分，共 60 分。

1. x 為實數且 $x \neq 1, 0$ ，若 $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 3x+1$ ， $f(2) = ?$ (12 分)

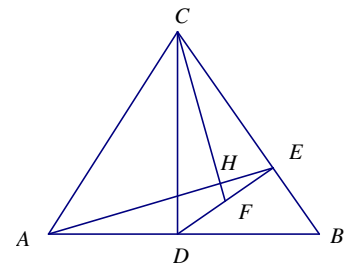
2. 試求 $\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{57} - \frac{1}{58} + \frac{1}{59} - \frac{1}{60}}{\frac{1}{31 \cdot 60} + \frac{1}{32 \cdot 59} + \frac{1}{33 \cdot 58} + \dots + \frac{1}{43 \cdot 48} + \frac{1}{44 \cdot 47} + \frac{1}{45 \cdot 46}} = ?$ (12 分)

3. 設 $a+b+c=1$ ，求證： $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$ (12 分)

4. 如圖， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D ， $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ 於 E ，

F 為 \overline{DE} 的中點， \overline{AE} 交 \overline{CF} 於 H

求證：(1) $\triangle ABE \sim \triangle CDF$ (8 分) (2) $\overline{CF} \perp \overline{AE}$ (4 分)



5. 有一平行四邊形 $ABCD$ ， $\angle A$ 為銳角，過 C 分別作 \overline{AB} 、 \overline{AD} 的垂線，垂足分別為 E 、 F ，
試證明 $\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{AC}^2$ (12 分)