

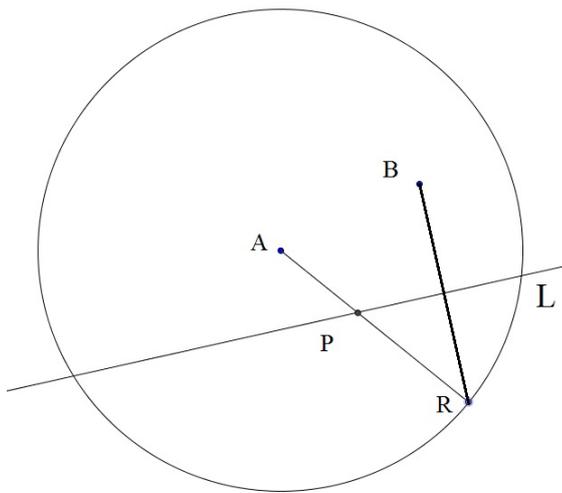
105 建國中學教師甄選 數學科

一、填充題(每題 7 分，共 63 分)

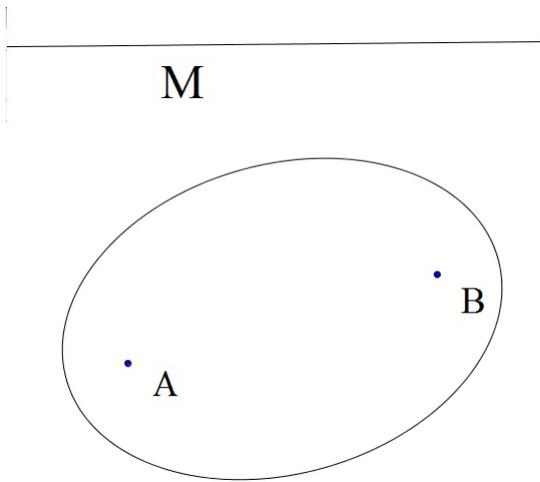
1. $\triangle ABC$ 的邊長為 7, 8, 9，其內切圓切 $\triangle ABC$ 於 D, E, F，求 $\triangle DEF$ 的面積。
2. 若正四面體 A-BCD 其中一組互相歪斜的稜線分別在直線 $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-11}{2}$ 和 $\frac{x-9}{18} = \frac{y+2}{k} = \frac{z+5}{5}$, $k \in \mathbb{R}$ 上，求此正四面體的體積。
5. 由正 12 邊形的頂點任取四點均不相鄰的機率為？
6. $\sum_{0 \leq i < j \leq 60} C_i^{60} C_j^{60} \equiv ? \pmod{31}$
7. 拋物線 $x^2 = 4cy$ 的上半支與 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 交於 A, B 兩點，若 A, B 之中點為 M，且 M 在 $x = y$ 上，求 $c = ?$
8. 有一四面體的五條稜長均為 1，剩下一稜長為 x ，若此四面體體積為 $v(x)$ ，求 $v(x)$ 的最大值。
9. 在座標平面上有一拋物線 $\Gamma: y^2 = 2x$ 和一圓 $O: (x-1)^2 + y^2 = 1$ ，若 P 點是 Γ 上的一點，設 P 和此圓的切線交 y 軸於 B, C 兩點，請問 $\triangle PBC$ 的最小值為何？

二、計算證明題(共 37 分)

1. (1) 如下圖，平面上有兩點 A, B，以 A 為半徑畫一圓使 B 在圓內，然後在圓上任取一點 R，連接 A, R 並作 R, B 的中垂線 L，設 L 與 \overline{AR} 交於 P。證明 P 的軌跡為橢圓且 L 是 P 的切線。(5 分)



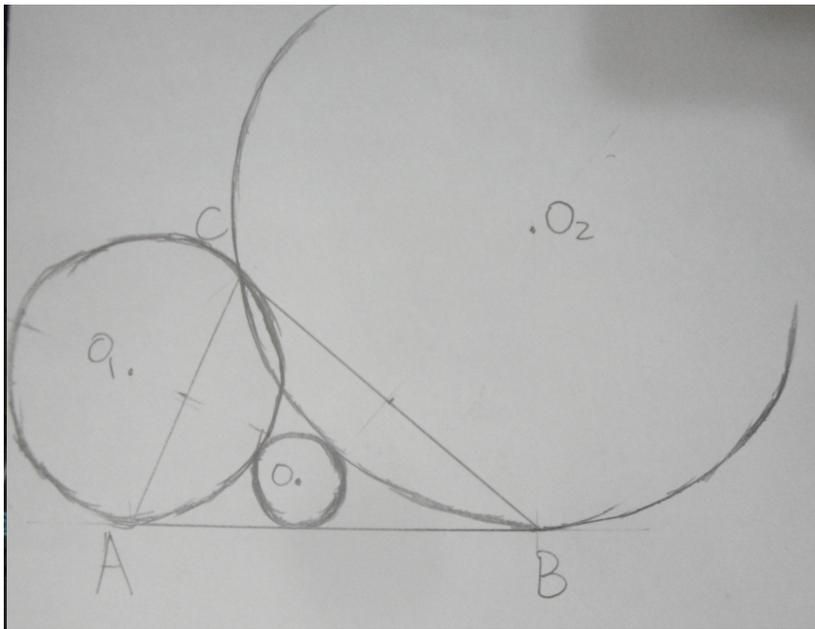
(2) 給定一橢圓及橢圓外一直線 M ，設橢圓的焦點為 A, B ，作一條平行於 M 的直線且與此橢圓相切，並寫下您的作法。(6分)



2. 如圖，給定一外接圓半徑為 R 的 $\triangle ABC$ ，設圓 O_1, O_2 為過 C 分別與 \overline{AB} 切於 A, B 兩點的圓，半徑分別為 r_1, r_2 。已知 $\triangle ABC$ 內有一圓 O 分別與 O_1, O_2, \overline{AB} 相切，令 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ ：

(1) 求證 $\frac{r_1}{R} = \frac{a}{b}$ 。(6分)

(2) 試以 r_1, r_2 表示圓 O 的半徑。(6分)



3. 數列 $\{a_n\}$ 的定義如下：

$$a_1 = (1 + 1),$$

$$a_2 = \left(\frac{1+2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2+2}{2}\right)^{\frac{2}{4}},$$

$$a_3 = \left(\frac{1+3}{3}\right)^{\frac{1}{9}} \left(\frac{2+3}{3}\right)^{\frac{2}{9}} \left(\frac{3+3}{3}\right)^{\frac{3}{9}}$$

...

$$a_n = \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}} \left(\frac{2+n}{n}\right)^{\frac{2}{n^2}} \cdots \left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n}{n^2}}$$

試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。(12 分)